Subdivision régulière

On subdivise $[a,b]$ en $n+1$ points régulièrement espacés, donc en n sous-intervalles.

La longueur de chaque sous-intervalle est donc $\frac{b-a}{n}$.

On a donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$

$= \text{constante p/r à } k$

Les réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont en progression arithmétique de raison $r = \frac{b-a}{n}$ et de premier terme $x_0 = a$.

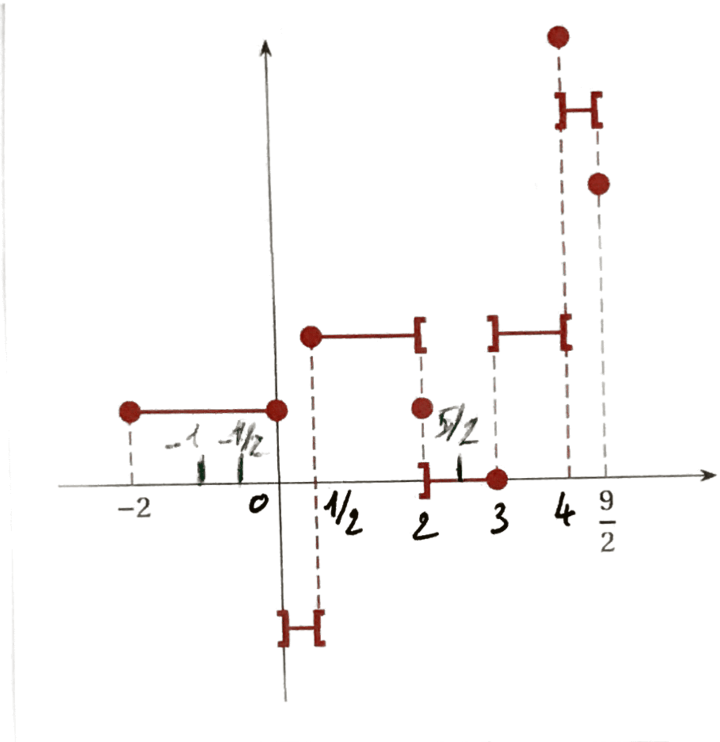
On a donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad x_k = x_0 + kr = a + k\frac{b-a}{n}$$

Exemple 1

Si φ est constante sur $[a,b]$ alors φ est constante sur $]a,b[$ et donc φ est en escalier sur $[a,b]$ et (a,b) est une subdivision adaptée à φ.

Exemple 2



Cette fonction est en escalier sur $\left[-2, \frac{9}{2}\right]$.

La subdivision $\left(-2, 0, \frac{1}{2}, 2, 3, 4, \frac{9}{2}\right)$ est adaptée à cette fonction en escalier.

C'est le choix le plus naturel mais on peut prendre des subdivisions plus "fines" :

$\left(-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, 4, \frac{9}{2}\right)$ est aussi adaptée à cette fonction en escalier.

<u>dem prop4</u> Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>but</u> $\lambda \times \varphi$, $\varphi+\psi$, $\varphi \times \psi$ et $|\varphi|$ sont aussi des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Pour $\lambda \times \varphi$ et $|\varphi|$ c'est vraiment évident.

Soient σ (resp. σ') une subdivision adaptée à φ (resp. ψ).
Alors la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est adaptée à la fois aux fonctions φ et ψ.
On la note $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.
φ et ψ sont constantes, respectivement égales à c_k et d_k, sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$, $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Alors $\varphi+\psi$ et $\varphi \times \psi$ sont donc égales respectivement à $c_k + d_k$ et $c_k \times d_k$ sur ces mêmes intervalles.
Donc $\varphi+\psi$ et $\varphi \times \psi$ sont aussi en escalier sur $[a,b]$.

<u>Rem</u> $\mathcal{E}([a,b]; \mathbb{R})$ est donc un sev de $\mathbb{R}^{[a,b]}$