Th 21 Si f est de classe C^{n+1} sur l'intervalle I :

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{polynôme de Taylor en } a \text{ d'ordre } n} + \underbrace{\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt}_{\text{reste intégral de Taylor}}$$

$$= f(a) + f'(a) \times (x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots\cdots$$

dem th 21 Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

" pour toute fonction f de classe C^{n+1} sur I on a :

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \text{ "}$$

* Pour $n=0$. On suppose f C^1 sur I.

Pour $(a,x) \in I^2$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

$$= f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt \underset{\text{cor16}}{=} f(a) + f(x) - f(a)$$

$$= f(x)$$

Donc H_0 est vrai.

* Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai.

but mq H_{n+1} est vrai.

On se donne f C^{n+2} sur I et on fixe $(a,x) \in I^2$.

Alors f est en particulier C^{n+1} sur I donc

d'après H_n on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

Mais par IPP :

$$\int_a^x \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}}_{=u(t)} \underbrace{(x-t)^n}_{=v'(t)}\,dt = \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \times \frac{-(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!} \times -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\,dt$$

$$u'(t) = \frac{f^{(n+2)}(t)}{n!}$$

$$v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$$

L'IPP est licite car u et v sont C^1 sur I donc sur $[a,x]$.

Alors $f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\,dt$

Donc H_{n+1} est vrai.

* Par récurrence on a donc montré que H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 1 La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ elle est donc C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n \, dt$$

Pour $x = 1$:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \, dt$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{n!} \times (1-t)^n \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On procède par encadrement :

$$\forall t \in [0,1], \quad 0 \leq e^t \leq e \quad \text{et} \quad \frac{(1-t)^n}{n!} \geq 0$$

$$\text{donc } 0 \leq \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \leq e\frac{(1-t)^n}{n!}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^t}{n!}(1-t)^n \, dt \leq e \times \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, dt = \frac{e}{n!}\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{e}{(n+1)!}$$

Comme $0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on a d'après le théorème de convergence par encadrement :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{n!} \times (1-t)^n \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Par somme de limites :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - \int_0^1 \frac{e^t}{n!} (1-t)^n \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} e - 0$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e$$

<u>Ex2</u> La fonction sin est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc C^5 sur $\mathbb{R}$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 4 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\sin^{(5)}(t)}{4!}(x-t)^4 \, dt$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\cos t}{24}(x-t)^4 \, dt$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) = + \int_0^x \frac{\cos t}{24}(x-t)^4 \, dt$

Si on suppose $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$\forall t \in [0, x]$, $\quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $0 \leq \cos t \leq 1$

et $(x-t)^4 \geqslant 0$

donc $0 \leqslant \frac{\cos t}{24}(x-t)^4 \leqslant \frac{(x-t)^4}{24}$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{\cos t}{24}(x-t)^4 \, dt \leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24} dt \left[-\frac{(x-t)^5}{120}\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \frac{x^5}{120}$$

donc $0 \leqslant \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{x^5}{120}$.

Conclusion : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

<u>dem th 22</u> Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat :

"pour tout fonction f C^n sur I et $a \in I$ on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)"$$

* Pour $n=0$. On se donne f continue sur I et $a \in I$.

Comme f est continue en a : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$

$$\text{donc} \quad f(x) = f(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$$

Donc H_0 est vrai.

* Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel H_n est vrai :

<u>but</u> H_{n+1} est vrai :

On se donne f C^{n+1} sur I et $a \in I$.

Alors f' est C^n sur I et d'après H_n elle admet

le $DL_n(a)$:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right)$$

D'après le cor 17 (f C^{n+1} au vois de a donc au moins C^1 au vois de a) on peut intégrer terme à terme :

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

Donc H_{n+1} est vrai.

* Par récurrence H_n est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.