dem th 18 On suppose u et v de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$.

Ceci assure la continuité des fonctions $u' \times v$ et $u \times v'$ sur cet intervalle et donc l'existence de leur intégrale.

On a : $\forall x \in [a,b]$, $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

donc $u'(x) \times v(x) = (uv)'(x) - u(x) \times v'(x)$

Donc : $$\int_a^b u'(x) \times v(x)\,dx = \int_a^b (uv)'(x)\,dx - \int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx$$

$$\underset{\text{cont}}{=} u(b) \times v(b) - u(a) \times v(a) - \int_a^b u(x) \times v'(x)\,dx$$

Rem : Avec la notation $\int f(x)\,dx$ pour désigner une primitive de f.

la formule d'IPP s'écrit

$$\int u'(x) \times v(x)\,dx = u(x) \times v(x) - \int u(x) v'(x)\,dx$$

⚠ x est à la fois une variable globale et une variable muette

C'est absurde mais on le fait par habitude

Exemple 1

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \times \ln x \, dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} \, dx$$
$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$
$$= x . \ln x - x + cste$$

L'IPP est licite car les fonctions $u : x \longmapsto x$ et $v : x \longmapsto \ln x$ sont C^1 sur $]0, +\infty[$.

<u>Exemple 2</u> $I \stackrel{def}{=} \int_0^1 x^2 e^x \, dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

Comme u et v sont C^1 sur $[0,1]$:

$$I = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx = e - 0 - 2 \times \underbrace{\int_0^1 x e^x \, dx}_{\stackrel{def}{=} J}$$

de même $J = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - 0 - \left[e^x\right]_0^1$

$= e - (e - 1) = 1$

Donc $\boxed{I = e - 2}$

Exemple 3

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\pi} e^x \times \cos(x)\,dx$$

On pose $\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \cos x \end{cases}$ donc $\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = -\sin x \end{cases}$

u et v sont C^1 sur $[0,\pi]$ donc :

$$I = \left[e^x \cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x(-\sin x)\,dx$$

$$= -e^{\pi} - 1 + \underbrace{\int_0^{\pi} e^x \times \sin x\,dx}_{\overset{\text{def}}{=} J}$$

De même $J = \left[e^x \times \sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$

$$= 0 - 0 - I$$

donc $I = -e^{\pi} - 1 - I$

donc $2I = -e^{\pi} - 1$

donc $\boxed{I = -\frac{1}{2}(1 + e^{\pi})}$

rappel $e^x \times \cos x = \mathrm{Re}\left(e^{(1+i)x}\right)$

donc $I = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\,dx\right)$

On $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\,dx = \left[\frac{1}{1+i}e^{(1+i)x}\right]_0^{\pi}$

$$= \frac{1}{1+i}\left(e^{(1+i)\pi} - 1\right) = \frac{-e^{\pi}-1}{1+i}$$

$$= \frac{(-e^{\pi}-1)(1-i)}{2}$$

donc $\displaystyle I = \frac{-e^{\pi}-1}{2} \quad \left(\text{et } \int_0^{\pi} e^{x}\sin x = \frac{e^{\pi}+1}{2} = -I\right)$

dem th 19 On suppose f continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles et φ C^1 sur $[\alpha,\beta]$ à valeurs dans $[a,b]$

et tq $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$

On se donne F une primitive de f sur $[a,b]$.

Alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ d'après le cor 15

D'autre part on sait que F est de classe sur $[a,b]$ donc par composition $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$.

On a $\forall t \in [\alpha,\beta]$, $(F\circ\varphi)'(t) = \varphi'(t) \times F'(\varphi(t))$

$= \varphi'(t) \times f(\varphi(t))$

Donc $F\circ\varphi$ est une primitive de $\varphi' \times (f\circ\varphi)$ sur $[\alpha,\beta]$.

D'après le cor 15 :

$$\int_\alpha^\beta \varphi'(t) \times f(\varphi(t))dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

On a donc $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) \times f(\varphi(t))dt$

Exemple 4 $I \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

On pose $t = e^x$ ie $x = \ln t = \varphi(t)$

x	t
0	1
1	e

φ est C^1 sur $[1, e]$ donc le changement de variable est licite.

$dx = \varphi'(t) dt = \frac{dt}{t}$

$$I = \int_1^e \frac{t}{1+t^2} \times \frac{dt}{t}$$

$$I = \int_1^e \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan t\right]_1^e = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}$$

Exemple 5 $I \stackrel{def}{=} \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

On pose $x = \sin t = \varphi(t)$

x	t
0	0
1	$\pi/2$

φ est C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc le changement de variable est licite.

$dx = \cos t\,dt$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t}\,\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} |\cos t| \times \cos t\,dt$$

Or si $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\cos t \geqslant 0$

donc $|\cos t| \times \cos t = \cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

donc $I = \dfrac{1}{2}\left[t + \dfrac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2}$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\times 0 - 0 - \frac{1}{2}\times 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

dem cor 20

1. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

Dans l'intégrale $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ on pose $x = -t = \varphi(t)$

x	t
$-a$	a
0	0

φ est affine donc C^1 sur $[0, a]$

donc le changement de variable est licite

$dx = -dt$.

Alors $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt$

Comme f est paire : $f(-t) = f(t)$

donc $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$

x et t variables muettes.

Donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_{0}^{a} f(x)dx$

2. Dans ce cas $f(-t) = -f(t)$

donc $\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(x)dx$

donc $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$