Exemple d'intégrale fonction de ses bornes

On pose $g(x) = \int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t} dt$

1. Mq g définie sur $]0,+\infty[$

Si $x \in]0,+\infty[$ alors $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x}\right] \subseteq]0,+\infty[$.

or la fonction $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x}\right]$ et donc l'intégrale définissant $g(x)$ existe.

Donc $\boxed{g \text{ est définie sur }]0,+\infty[.}$

Rem On n'a pas demandé de montrer que g est définie exactement sur $]0,+\infty[$ mais seulement que $]0,+\infty[\subseteq \mathcal{D}_g$, c'est-à-dire que $g(x)$ existe au moins pour $x > 0$.

2. Mq g C^1 sur $]0,+\infty[$

On pose $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

on choisit un point de l'intervalle sur lequel $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue (ici $]0,+\infty[$)

Comme $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$

la fonction F est de classe C^1 sur ce même intervalle (ceci d'après le th fondamental de l'analyse).

On remarque que :

$$\forall x>0, \quad g(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt + \int_{1/\sqrt{x}}^1 \frac{e^t}{t}dt$$

$$= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt - \int_1^{1/\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt$$

$$= F(\sqrt{x}) - F(1/\sqrt{x})$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et F est C^1 sur $]0,+\infty[$ donc par composition

$x \longmapsto F(\sqrt{x})$ est C^1 sur $]0,+\infty[$.

De même $x \longmapsto F(1/\sqrt{x})$ est C^1 sur $]0,+\infty[$.

Par somme $\boxed{g \text{ est } C^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$.

3. <u>Calcul de $g'(x)$ et variations de g</u>

On a : $\forall x>0, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times F'(\sqrt{x}) - \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{3/2}} F'\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^{3/2}} \cdot \sqrt{x} \times e^{1/\sqrt{x}}$$

Donc $\forall x>0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2x}\left(e^{\sqrt{x}} + e^{1/\sqrt{x}}\right) > 0$

x	0		$+\infty$
g	$\Vert$	$\nearrow$	

4. Limite en $+\infty$

On suppose $x \geqslant 1$. Alors $\sqrt{x} \geqslant 1 \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Pour tout $t \in \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{x}\right]$: $t>0$ donc $e^t \geqslant 1$

donc $\dfrac{e^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}\,dt \geqslant \int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t} = \Big[\ln t\Big]_{t=\frac{1}{\sqrt{x}}}^{t=\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln x - \left(-\frac{1}{2}\right)\ln x$$

$$= \ln x$$

donc $\forall x \geqslant 1$, $g(x) \geqslant \ln x$.

Comme $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ le théorème de minoration [th 24 chap 9]

on a $\boxed{g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$