Chapitre 16

Intégration sur un segment

Sommaire

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, $[a,b]$ désignera un segment non vide et non réduit à un point, c'est-à-dire tel que $a<b$.

1 Fonctions en escalier

1.1 Définitions et premières propriétés

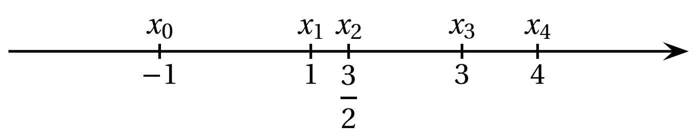
Définition 1 – Subdivision de $[a,b]$

Une *subdivision* du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ de $n+1$ points de $[a,b]$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, telle que :

$$a=x_0<x_1<\dots<x_k<x_{k+1}<\dots<x_n=b$$

Cela revient à découper le segment $[a,b]$ en n sous-intervalles.

✎ ***Exemple.*** $\sigma=\left(-1,1,\frac{3}{2},3,4\right)$ est une subdivision de 5 points de $[-1,4]$.



Définition 2 – Pas d'une subdivision

Si $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision de $n+1$ points de $[a,b]$, alors on appelle *pas* de cette subdivision le réel positif :

$$|\sigma|=\max_{0\leq k\leq n-1}\left(x_{k+1}-x_k\right)$$

✎ ***Exemple.*** Sur l'exemple précédent : $|\sigma|=2$.

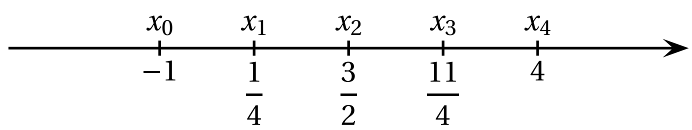
Si $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision de $n+1$ points de $[a,b]$, on dit qu'elle est *régulière* lorsque la quantité $x_{k+1}-x_k$ ne dépend pas de k. Pour n fixé, il n'y a en fait qu'une seule subdivision régulière possible. On peut donc parler donc de **la** subdivision régulière de $n+1$ points de $[a,b]$. Elle est donnée par :

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad x_k=a+k\times\frac{b-a}{n}$$

On a :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad x_{k+1}-x_k=|\sigma|=\frac{b-a}{n}$$

✎ ***Exemple.*** $\sigma = \left(-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{4}, 4\right)$ est **la** subdivision régulière de 5 points de $[-1, 4]$.



Définition 3 – Fonction en escalier sur $[a, b]$

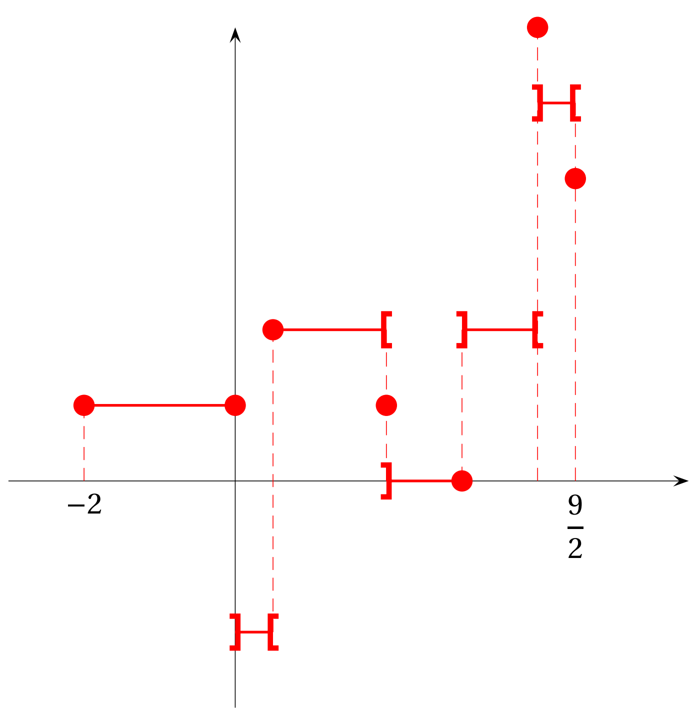
On dit que $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a, b]$ lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1$ points de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, φ est constante sur $]x_k, x_{k+1}[$.
Une telle subdivision σ est dite *adaptée* à φ.

On remarque que les valeurs prises par φ aux points x_0, x_1, …, x_n n'ont pas d'importance.

✎ ***Exemple.*** Toute fonction constante sur $[a, b]$ est en escalier.

La subdivision σ n'est pas unique : on peut éventuellement retirer certains points, et on peut toujours en ajouter de façon arbitraire. On en déduit que toute subdivision contenant une subdivision adaptée à φ est encore adaptée à φ.

✎ ***Exemple.*** La fonction suivante est en escalier sur $\left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$:



Notation : on notera $\mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$ à valeurs réelles.

La remarque suivante est importante dans la suite : φ et ψ sont deux fonctions en escaliers sur $[a,b]$ et si σ et σ' sont des subdivisions de $[a,b]$ resxpectivement adaptées à φ et à ψ alors la subdivision $\sigma \vee \sigma'$, formée de la réunion des points de σ et de σ', est une subdivision adaptée simultanément à φ et à ψ.

Proposition 4 – Stabilité de $\mathscr{E}([a,b];\mathbb{R})$

Si φ et ψ sont deux fonctions en escaliers sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\lambda.\varphi+\psi$, $\varphi \times \psi$ et $|\varphi|$ sont elles aussi en escaliers sur $[a,b]$.

1.2 Intégrale sur un segment d'une fonction en escalier

Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma = (x_0,\dots,x_n)$ une subdivision en $n+1$ points de $[a,b]$, adaptée à φ. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, on note λ_k la valeur prise par φ sur $]x_k,x_{k+1}[$. On définit alors le nombre réel :

$$I(\sigma,\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \times (x_{k+1}-x_k)$$

On peut montrer que $I(\sigma,\varphi)$ est indépendante de la subdivision σ choisie adaptée à φ. En effet si l'on forme une subdivision σ' en adjoignant un point à la subdivision σ, on montre facilement que $I(\sigma,\varphi) = I(\sigma',\varphi)$. En raisonnant par récurrence, on montre que la propriété perdure pour toute subdivision σ' contenant les points de σ. Enfin, en transitant par la réunion des deux subdivisions, on observe que la propriété est encore valable quand σ et σ' sont des subdivisions quelconques toutes deux adaptées à f.

Le réel $I(\sigma,\varphi)$ est désormais noté $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ et est appelé *intégrale* de φ sur le segment $[a,b]$.

Géométriquement, $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ représente l'aire algébrique de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}_\varphi$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$: les aires rectangles situés au-dessus de l'axe (Ox) sont affectées d'un signe $+$, et celles des rectangles situés en-dessous de l'axe (Ox) sont affectées d'un signe $-$.

Remarque : les valeurs prises par φ aux points de la subdivision n'interviennent pas dans le calcul de $\displaystyle\int_{(a,b]} \varphi$. On en déduit que si on change les valeurs d'une fonction en escalier en un nombre fini de points, alors on ne change pas la valeur de son intégrale.

✎ ***Exemple.*** On reprend la fonction φ du paragraphe précédent. Alors :

$$\int_{[-2,9/2]} \varphi = 1\times(0-(-2)) + (-2)\times\left(\frac{1}{2}-0\right) + 2\times\left(2-\frac{1}{2}\right) + 0\times(3-2) + 2\times(4-3) + 5\times\left(\frac{9}{2}-4\right) = \frac{13}{2}$$

✎ ***Exemple.*** Si f est constante égale à λ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \lambda \times (b-a)$.

✎ ***Exemple.*** Si f est nulle sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$.

Dans la proposition suivante, φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et λ une constante réelle.

Proposition 5 – Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

1. Linéarité de l'intégrale. $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda \times \varphi + \psi) = \lambda \times \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$
2. Positivité de l'intégrale. Si $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$
3. Croissance de l'intégrale. Si $\forall x \in [a,b]$, $\varphi(x) \geq \psi(x)$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi \geq \int_{[a,b]} \psi$
4. Inégalité triangulaire. $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} \varphi\right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$
5. Relation de Chasles. Si $c \in]a,b[$ alors les restrictions de φ à $[a,c]$ et $[c,b]$ sont en escalier et $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$

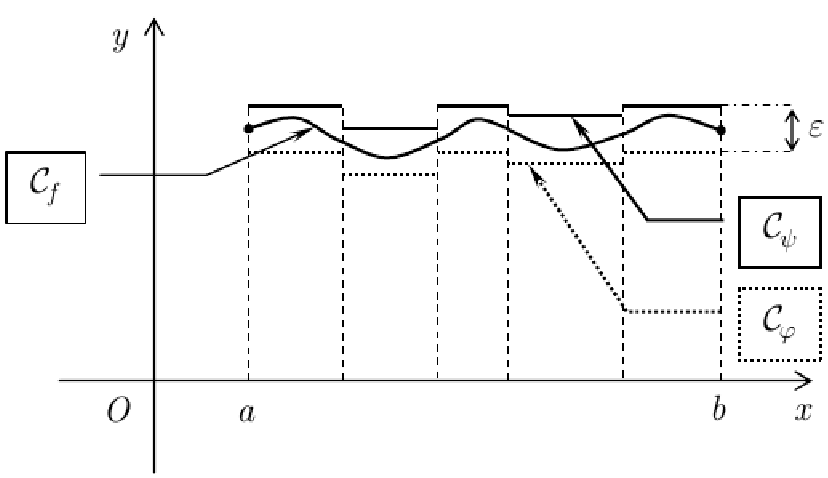
2 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

2.1 Définition

Théorème 6 – Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ et à valeurs réelles.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux applications φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [a,b], \quad 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$$



Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On définit les parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$e(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi ;\ \varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x) \right\}$$

et :

$$E(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi ;\ \psi \in \mathscr{E}([a,b]) \text{ et } \forall x \in [a,b],\ f(x) \leq \psi(x) \right\}$$

L'ensemble $e(f)$ étant majoré non vide, et l'ensemble $E(f)$ étant minoré et non vide, on peut définir les réels :

$$\alpha = \sup e(f) \quad \text{et} \quad \beta = \inf E(f)$$

De plus $\alpha \leq \beta$.

En fait ces deux nombres sont égaux.

Théorème 7 – Définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue

Si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, la borne supérieure des intégrales sur $[a,b]$ des fonctions en escalier qui minorent f, est égale à la borne inférieure des intégrales sur $[a,b]$ des fonctions en escalier qui majorent f.

On appelle alors *intégrale* de f sur $[a,b]$ la valeur commune de ces deux bornes et on la note $\int_{[a,b]} f$. Lorsqu'on veut préciser la variable de la fonction on peut noter l'intégrale $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ ou encore $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. La fonction f est appelée *intégrande*.

⚠ Attention : dans la notation précedente, la variable x est muette :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \ldots$$

<u>**Interpétation géométrique :**</u> $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire algébrique de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Terminons par une petite précision : si f est à la fois continue sur $[a,b]$, et en escalier sur $[a,b]$, nous avons donc deux définitions différentes de l'intégrale de f entre $[a,b]$. En fait f est une fonction constante sur $[a,b]$ et les deux définitions précédentes coïncident.

<u>**Extension de la définition.**</u> On pose :

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Ainsi si f est continue sur un intervalle I, on a défini $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $(a,b) \in I^2$ (sans la condition $a < b$).

2.2 Propriétés de l'intégrale sur un segment d'une fonction continue

Nous allons voir que les propriétés de l'intégrale sont très proches de celles de la **somme discrète** $\sum$. Par analogie, on dit que $\int$ est une **somme continue**.

Dans le théorème suivant, f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs réelles, et λ est une constante réelle.

Théorème 8 – Propriétés de l'intégrale des fonctions continues

On se donne a, b et c trois points de I.

1. Linéarité de l'intégrale. $\int_a^b (\lambda \times f(x) + g(x))\, \mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$
2. On suppose que $a \leq b$.
   (a) Positivité de l'intégrale. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \geq 0$
   (b) Croissance de l'intégrale. Si $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$
   (c) Inégalité triangulaire. $\left|\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$
3. Relation de Chasles. $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\, \mathrm{d}x$

Pour les trois propriétés qui utilisent une inégalité, il est indispensable que $a < b$: on dira que « les bornes sont dans le bon sens ».

Noter que pour la relation de Chasles, on ne suppose pas que $a < c < b$.

⚠ Prendre garde à la différence avec la relation de Chasles pour les sommes discrètes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\boxed{\mathrm{p}}} u_k + \sum_{k=\boxed{\mathrm{p+1}}}^{n} u_k$$

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\, \mathrm{d}x$ (intégrales de Wallis). Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

✎ ***Exemple.*** Montrer que, si f continue sur $[a, b]$ tel que $a \leq b$:

$$\left|\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq (b-a).\ \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$$

Corollaire 9 – Linéarité de l'intégrale

Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels, alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k . f_k(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k . \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

⚠ Ceci est complètement faux avec la multiplication ! En général :

$$\int_a^b f(x) \times g(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème 10 – Stricte positivité de l'intégrale

Soit f une fonction **continue** et **positive** sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$.

1. Stricte positivité. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$

2. Contraposée. $\displaystyle\exists x_0 \in [a,b];\ f(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0$

⚠ Ce résultat est faux pour l'intégrale des fonctions en escalier.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x$. Alors $I_n > 0$.

Le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé *valeur moyenne* de f sur le segment $[a,b]$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est une valeur prise par f sur $[a,b]$.

2.3 Sommes de Riemann

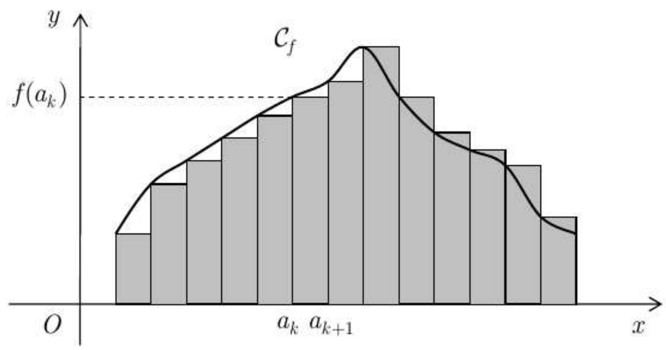
Définition 11 – Somme de Riemann

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et n est un entier de $\mathbb{N}^*$, on appelle *somme de Riemann* de f d'ordre n :

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Pour simplifier on note $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Interprétation graphique : Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{b-a}{n} \times f(a_k)$ est l'aire du rectangle de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur $f(a_k)$. $(b-a) \times S_n(f)$ est la somme des aires de ces rectangles, le long du segment $[a,b]$.



Théorème 12 – Théorème de la valeur moyenne

Si f est continue sur $[a,b]$ alors :

$$S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>**Cas particulier** $a=0$ **et** $b=1$</u> : Si f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\frac{1}{n} \times \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

On en déduit une méthode numérique de calcul approchée d'une intégrale, appelée **méthode des rectangles**.

3 Calcul intégral

3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Dans le théorème suivant I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, et f est une fonction définie sur I à valeurs réelles.

Théorème 13 – Théorème fondamental de l'analyse

On suppose que f est continue sur I et on se donne x_0 un point de I.
On définit une fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in I,\ F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction F est alors de classe C^1 sur I et : $\quad \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Autrement dit F est une primitive de f sur I. On peut aussi remarquer que F s'annule en x_0 : $F(x_0) = 0$.

⚠ Les notations $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ et $\int_{x_0}^{t} f(t)\,dt$ n'ont pas de sens. Par contre $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dt = (x-x_0)\times f(x)$.

Corollaire 14 – Primitives d'une fonction continue

1. Si f est continue sur l'intervalle I alors elle admet une infinité de primitives sur I, toutes égales à une constante additive près, et toutes de classe C^1 sur I.
2. Si $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = 0$: elle est donnée par $\forall x \in I,\ F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

⚠ Une fonction définie sur I mais non continue n'admet pas de primive en général.

Corollaire 15 – Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

Si f est continue sur $[a,b]$ et si F est n'importe quelle primitive de f sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

Corollaire 16 – Théorème fondamental de l'analyse version 2

Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

✎ ***Exemple.*** Démontrer l'inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 sur intervalle I et à dérivée bornée.

Corollaire 17 – Primitivation d'un développement limité

On suppose que f est de classe C^1 au voisinage de 0 et que f' admet un $DL_n(0)$:

$$f'(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

Alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant terme à terme :

$$f(x) = f(0) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_{x\to 0}(x^{n+1})$$

3.2 Fonctions définies par une intégrale

On peut définir des fonctions à l'aide d'une intégrale.

On suppose donc que u et v sont deux fonctions numériques et que f est une fonction numérique continue sur un intervalle I.

On définit alors une fonction g par la formule :

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction g peut alors être étudier comme n'importe quelle fonction numérique : dérivée, variations, limites, équivalents... On propose le plan d'étude suivant.

• **Ensemble de définition** :

$$f \text{ est continue sur } [u(x), v(x)] \Longrightarrow x \in \mathscr{D}_g$$

On détermine donc la plus grande partie A de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in A$, f est continue sur le segment $[u(x), v(x)]$. On a alors $A \subseteq \mathscr{D}_g$.

RAISONNEMENT IMPORTANT : pour aller plus loin on se donne une autre expression de $g(x)$. On prend F n'importe quelle primitive de f sur I (F existe car f est continue). On a alors :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) \qquad (*)$$

C'est cette expression qui va nous permettre de poursuivre notre étude.
Noter pour la suite que F est C^1 sur I.

• **Continuité de** g : d'après la formule $(*)$, si u et v sont continues sur A et à valeurs dans I, alors g est continue sur A.

• **Dérivabilité de** g : d'après la formule $(*)$, si u et v sont dérivables sur A et à valeurs dans I, alors g est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = v'(x).F'\big(v(x)\big) - u'(x).F'\big(u(x)\big) = v'(x).f\big(v(x)\big) - u'(x).f\big(u(x)\big)$$

En général on se sait pas calculer l'expression de $F(x)$, mais ce n'est pas important vu que l'expression de $g'(x)$ dépend seulement de celle de $f(x)$.

• **Limites ou équivalents de** g **en certains points** : on détermine un encadrement de f, et on en déduit par croissance de l'intégrale un encadrement de g.

✎ ***Exemple.*** On pose $g(x) = \displaystyle\int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est définie sur $]0, +\infty[$ et étudier ses variations. Montrer que $\forall x \geq 1$, $g(x) \geq 2\ln(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

3.3 Formules de calcul intégral

Théorème 18 – Intégration par parties (IPP)

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x).v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode : Penser à ce théorème lorsqu'apparaissent :

- des termes en $x^n.f(x)$ qu'on simplifie en dérivant n fois x^n ;
- des bijections réciproques comme ln, arctan, arccos ... ;
- des termes en sin, cos, exp dont la dérivée est proche de la fonction intiale.

✎ ***Exemple.*** Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème de changement d'indice dans une somme discrète $\sum$.

Théorème 19 – Théorème de changement de variable

Si f est continue sur $[a,b]$ et si φ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans $[a,b]$, et vérifiant les conditions :

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b$$

alors on a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

En pratique : pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t)$.
On a alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et on détermine α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \mathrm{e}^x$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

Corollaire 20 – Intégrale d'une fonction paire/impaire

Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$ où $a > 0$. Alors :

1. Si f est paire sur $[-a, a]$:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$
2. Si f est impaire sur $[-a, a]$:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} x\,\mathrm{d}x = 4$ et $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \arctan\Big(\sin\big(\arctan(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}x = 0.$

3.4 Formules de Taylor

Cette formule est aussi appelée formule de Taylor-Mac Laurin.

Théorème 21 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soient n un entier naturel et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_{a}^{b} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\,\mathrm{d}t$$

En particulier si f est classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant 0 alors :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_{0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$

✎ ***Exemple.*** Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$

On déduit la formule de Taylor-Young qui donne tous les développements limités usuels.

Théorème 22 – Formule de Taylor-Young

Soient n un entier naturel et f une fonction de classe C^n sur un intervalle I. Alors, pour tout $a \in I$, f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big)$$

En particulier si f est de classe C^n sur un voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o_{x\to 0}(x^n)$$

⚠ Cette fois c'est une formule *locale*, contrairement à la formule précédente qui était *globale*.

Corollaire 23 – Existence d'un DL à tout ordre en un point

Si f est classe C^∞ sur un intervalle I contenant le point a, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un $DL_n(a)$.

On en déduit tous les developpements limités usuels.

4 Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

On se donne I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I.

Définition 24 – Intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction continue à valeurs complexes

Pour tout $(a,b) \in I^2$ on appelle intégrale de f entre a et b le nombre complexe défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Important. On a donc par définition :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \mathrm{Im}\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x + i\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0 + i0 = 0.$

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+i} = \int_0^1 \frac{x-i}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - i\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4}.$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, l'intégrale peut se calculer à l'aide d'une primitive.

Théorème 25 – Calcul de l'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction à valeurs complexes

Si F est n'importe quelle primitive de f sur l'intervalle I alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b}$$

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{i}\mathrm{e}^{ix}\right]_0^{2\pi} = \frac{\mathrm{e}^{2i\pi} - \mathrm{e}^0}{i} = 0.$

✎ ***Exemple.*** Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ax}\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

On retrouve la propriété de linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles.

Théorème 26 – Propriétés de l'intégrale

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et f, g sont deux fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors pour tout $(a,b,c) \in I^2$:

1. $\displaystyle\int_a^b \lambda \times f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

⚠ Par contre les propriétés de croissance et de positivité n'ont plus de sens dans le cadre des fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{it}$ est d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$ et pourtant elle ne s'annule pas.

Théorème 27 – Inégalité triangulaire

Pour tout $(a,b) \in I^2$ tel que $a \leq b$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$$

Les formules d'intégration par parties, de changement de variable et de Taylor avec reste intégral restent valables.

✎ ***Exemple.*** Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\pi} x\mathrm{e}^{ix}\,\mathrm{d}x = -2 + i\pi$.

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- Connaître les propriétés de l'intégrale.
  - Savoir utiliser la linéarité ou la relation de Chasles.
  - Savoir encadrer une intégrale en utilisant la croissance de l'intégrale ou l'inégalité triangulaire.

- Connaître le théorème de la valeur moyenne.
  - Savoir l'utiliser pour étudier une intégrale à partir de propriétés de suites réelles.
  - Savoir l'utiliser pour calculer la limite d'une suite réelle.

- Connaître les grandes formules du calcul intégral.
  - Savoir intégrer par parties.
  - Savoir utiliser un changement de variable.
  - Savoir encadrer une fonction par des polynômes avec la formule de Taylor avec reste intégral.

- Savoir étudier une fonction définie par une intégrale.
  - Étudier son ensemble de définition en déterminant les intervalles de continuité de l'intégrande.
  - Étudier sa dérivabilité grâce au théorème fondamental de l'analyse.
  - Utiliser des encadrements pour étudier les limites aux bornes ou chercher des équivalents.

6 Exercices

Majorations et minorations d'intégrales

EXERCICE 1. Encadrement de sommes à l'aide d'intégrales

1. (a) Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1+\ln(n).$$
   (c) En déduire que la suite $\left(H_n - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente puis donner un équivalent de H_n lorsque $n \to +\infty$.
2. (a) Étudier la fonction $f : t \longmapsto \frac{\ln t}{t}$.
   (b) Adapter la méthode précédente pour trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$, lorque $n \to +\infty$.

EXERCICE 2. Limite d'une somme

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $u_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^n$.

1. Démontrer les inégalités, pour $x \in]0,1[$: $\frac{-x}{1-x} \leq \ln(1-x) \leq -x$

Pour $p \in [\![0, n-2]\!]$, on pose $v_{n,p} = \sum_{j=1}^{n-p-1} \left(\frac{j}{n}\right)^n$ et $w_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} \left(1-\frac{k}{n}\right)^n$.

2. Pour $j \in [\![1, n-p-1]\!]$, établir que $\left(\frac{j}{n}\right)^n < n \times \int_{j/n}^{(j+1)/n} t^n\,\mathrm{d}t$ puis montrer que $0 \leq v_{n,p} \leq \mathrm{e}^{-p}$.
3. Obtenir un encadrement de $w_{n,p}$.
4. En déduire un encadrement de u_n.
5. Montrer que (u_n) possède une limite et la calculer.

Suites définies par une intégrale

EXERCICE 3. Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer u_1.
2. Établir que : $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit $a \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \geqslant (1-a)^{\frac{1}{n}} \dfrac{a}{1+a}$.
4. A l'aide d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$ judicieusement choisie, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 4. Étude d'une suite

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n \ln\left(1+t^2\right)\,dt.$$

EXERCICE 5. Étude d'une suite

Pour $n, p \in \mathbb{N}$ on pose $I_{n,p} = \int_{-1}^1 (1+x)^n (1-x)^p\,dx$.

1. Pour $n \geq 1$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n-1,p+1}$, puis $I_{n,p}$ en fonction de $I_{0,n+p}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.
2. Retrouver cette valeur en utilisant la formule du binôme.
3. À l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$ calculer $W_{2n} = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Fonctions définies par une intégrale

EXERCICE 6. Un calcul de limite

Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

EXERCICE 7. Étude d'une fonction

Soit : $G(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que G est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
3. Calculer G'. Conclusion ?

EXERCICE 8. Étude d'une fonction

Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{(\sin x)^2} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{(\cos x)^2} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est π-périodique et paire.
3. Montrer que f est constante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Donner la valeur de cette constante. On commencera par démontrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 9. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Vérifier que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner $f'(x)$.
4. A l'aide du théorème des gendarmes, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Calcul intégral

EXERCICE 10. Calculs d'intégrales de fractions rationnelles

1. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{u-1}{2u+1}\mathrm{d}u$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

EXERCICE 11. Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :

$$\int_0^{\pi/4} \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx,\quad \int e^{-x}\cos(x)\,dx,\quad \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx,\quad \int_0^1 t\arctan(t)\,dt$$

EXERCICE 12. Changements de variables

Au moyen du changement de variable indiqué entre parenthèses calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)} \qquad (u = \cos(t))$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x \qquad (u = \tan(x))$
3. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (x = 1/t)$

EXERCICE 13. Utilisation d'une symétrie

Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a,b]$.
Montrer au moyen d'un changement de variable affine que $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
Application : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 14. Calcul d'une famille d'intégrale

Pour $a \in]-1,1[$, on considère la fonction f_a définie par : $f_a(x) = \left|1-ae^{ix}\right|^2$.

1. Pour tout $a \in]-1,1[$ et tout $x \in [0,\pi]$ vérifier les propriétés suivantes :
   - $\left(1-|a|\right)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant \left(1+|a|\right)^2$
   - $f_a(\pi - x) = f_{-a}(x)$
   - $f_{a^2}(x) = f_a\left(\frac{x}{2}\right) f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)$

On pose, pour tout $a \in]-1,1[$: $\displaystyle g(a) = \int_0^{\pi} \ln\left(f_a(x)\right)\mathrm{d}x$.

2. Montrer que g est une fonction paire.
3. Montrer que : $\forall a \in]-1,1[,\ g(a^2) = 2g(a)$.
4. Montrer que g est continue en 0.
5. En déduire que : $\forall a \in]-1,1[,\ g(a) = 0$.

Sommes de Riemann

EXERCICE 15. Limite de sommes

1. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ a_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1,\ x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

EXERCICE 16. Inégalité de Jensen

1. Vérifier que : $\forall t > 0, \ln(t) \leqslant t - 1$.
2. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ n réels strictement positifs. En utilisant $a_k = \dfrac{x_k}{\overline{x}}$, où $\overline{x}$ est la moyenne des x_k, établir que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$
3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives. Montrer que :
$$\int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercices théoriques

EXERCICE 17. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$. Établir que :

$$\left|\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

Hint : on pourra étudier le signe de la fonction polynômiale $x \longmapsto P(x) = \displaystyle\int_a^b \big(x.f(t) + g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$

EXERCICE 18. Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit f de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\times\sin(nt)\,dt = 0.$$

EXERCICE 19. Une formule de la moyenne

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1, positive et décroissante sur I et que g est continue sur I.

On considère le fonction G définie sur I par $G(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que G est de classe C^1 sur I.
2. Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que : $G([a,b]) = [m,M]$.
3. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire que :
$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a).$$
5. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$
6. On suppose que $a > 0$; montrer que : $\displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2+b-a}{a}$.
7. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$

EXERCICE 20. Une formule de calcul intégral

Dans cet exercice, a est un réel strictement positif, $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$, nulle en 0. La fonction f est alors bijective de $[0,a]$ sur $[0, f(a)]$, de réciproque notée g. On veut montrer que, pour tout réel $t \in [0,a]$:
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y = tf(t) \qquad (1).$$

1. Vérifier la relation (1) dans le cas où : $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $t \in [0,a]$, on note $\varphi(t)$ la quantité :
$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y - tf(t).$$
2. Montrer que φ est définie et continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$.
3. En déduire l'égalité (1).

EXERCICE 21. Inégalités de Kolmogorov

Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on suppose que $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et on note $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|f^{(k)}(x)\right|$.

1. (a) À l'aide de l'égalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $h > 0$: $M_1 \leq h\dfrac{M_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$.

   (b) En déduire que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.
2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que : $M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.