<u>dem th30</u> On fixe $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ une base de $\mathbb{E}$

et $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$

<u>but</u> $\exists! f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que

$$f(\vec{\varepsilon_1}) = \vec{v_1}, \ f(\vec{\varepsilon_2}) = \vec{v_2}, \ \dots \text{ et } f(\vec{\varepsilon_p}) = \vec{v_p}$$

Existence $*$ Si $\vec{x} \in \mathbb{E}$ alors $\vec{x}$ s'écrit de manière unique $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \vec{\varepsilon_k}$ où $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$.

On pose $f(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \vec{v_k}$

On a donc défini une application $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$

$*$ Montrons que f est linéaire.

Soit $(\alpha, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$.

On note $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot \vec{\varepsilon_k}$ et $\vec{y} = \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot \vec{\varepsilon_k}$

où $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^{2p}$.

Alors $\alpha\vec{x} + \vec{y} = \alpha . \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{\varepsilon_k} + \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot \vec{\varepsilon_k}$

$$= \sum_{k=1}^{p} (\alpha x_k + y_k) \cdot \vec{\varepsilon_k}$$

Donc $f(\alpha\vec{x} + \vec{y}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} (\alpha x_k + y_k) \cdot \vec{v_k}$

donc $f(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha.\sum_{k=1}^{p} x_k.\vec{v_k} + \sum_{k=1}^{p} y_k.\vec{v_k}$

$$= \alpha.f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

Ceci prouve que f est linéaire.

* Montrons que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(\vec{\varepsilon_k}) = \vec{v_k}$

Pour $k \in [\![1,p]\!]$ fixé on a :

$$\vec{\varepsilon_k} = 0.\vec{\varepsilon_1} + \cdots + 0.\vec{\varepsilon_{k-1}} + 1.\vec{\varepsilon_k} + 0.\vec{\varepsilon_{k+1}} + \cdots + 0.\vec{\varepsilon_p}$$

donc $f(\vec{\varepsilon_k}) \overset{def}{=} 0.\vec{v_1} + \cdots + 0.\vec{v_{k-1}} + 1.\vec{v_k} + 0.\vec{v_{k+1}} + \cdots + 0.\vec{v_p} = \vec{v_k}$

Donc f existe.

Unicité : Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ tq $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(\vec{\varepsilon_k}) = g(\vec{\varepsilon_k})$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ fixé qcq.

On note $\vec{x} = \sum_{k=1}^{p} x_k.\vec{\varepsilon_k}$ où $(x_1,..,x_p) \in \mathbb{K}^p$

Par def de f : $f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} x_k.\vec{v_k}$.

Et comme g est linéaire :

$$g(\vec{x}) = g\left(\sum_{k=1}^{p} x_k.\vec{\varepsilon_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} x_k.g(\vec{\varepsilon_k})$$

$$= \sum_{k=1}^{p} x_k.\vec{v_k} = f(\vec{x})$$

C'est vrai pour tout $\vec{x} \in \mathbb{E}$.

Donc $f = g$.

Donc f est unique.