<u>dem A32</u> On se donne $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire et $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

<u>1.</u> On pose $\mathbb{G} = \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$. C'est un sev de $\mathbb{E}$.

<u>but</u> $f(\mathbb{G}) = \text{Vect}(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), \dots, f(\vec{u_p}))$

Par double inclusion.

$\boxed{\subseteq}$ Soit $\vec{y} \in f(\mathbb{G})$.

Par déf : $\exists \vec{x} \in \mathbb{G},\ \vec{y} = f(\vec{x})$.

On a $\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p})$ donc :

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \vec{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \vec{u_k}$

Comme f est linéaire : $f(\vec{x}) = f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \vec{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . f(\vec{u_k})$

Donc $\vec{y} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . f(\vec{u_k})$ donc $\vec{y} \in \text{Vect}(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$

$\boxed{\supseteq}$ Soit $\vec{y} \in \text{Vect}(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), \dots, f(\vec{u_p}))$.

Par déf : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \vec{y} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . f(\vec{u_k})$

Comme f est linéaire : $\vec{y} = f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \vec{u_k}\right)$

Comme $G = \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p})$

on a $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \vec{u_k} \in G$

donc $\vec{y} \in f(G)$.

2. On suppose que la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est génératrice de E ie que :

$$E = \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}).$$

On a donc d'après 1. $f(E) = \text{Vect}(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$

Or $\text{Im}(f) \overset{\text{def}}{=} f(E)$.

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{u_1}), f(\vec{u_2}), \dots, f(\vec{u_p}))$

ie $\text{Im}(f)$ est engendré par les vecteurs $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$.

Application Si $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ est une base de E alors :

- $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$
- On peut extraire de la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ une base de $\text{Im}(f)$