<u>dem th 34</u> On suppose $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

<u>1.</u> On suppose f surjective de E vers F.

On se donne $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille génératrice de E.

<u>but</u> Mq la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est génératrice de F.

Comme f est surjective : $Im(f) \overset{(*)}{=} F$ (th 20)

Comme la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est génératrice de E on a

$$Im(f) = Vect(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p})) \underset{(*)}{=} F$$

donc la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est génératrice de F..

<u>2.</u> $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ On suppose f surjective de E vers F.

Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une base qcq de E.

C'est en particulier une famille génératrice de E

donc d'après 1. on sait que la famille

$(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est génératrice de F.

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ On suppose qu'il existe $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ base de $\mathbb{E}$ telle que la famille $(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$ est génératrice de $\mathbb{F}$.

<u>but</u> f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Par hyp : $\mathbb{F} = \text{Vect}\,(f(\vec{u_1}), \dots, f(\vec{u_p}))$

Comme $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est génératrice de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{F} = \text{Im}\, f$$

Donc f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.