dem th37 On suppose $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire.

1. On suppose f injective sur $\mathbb{E}$.

On se donne $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ une base de $\mathbb{E}$.

Donc $\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p}) = p$

D'après le th33 la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ est libre. Elle est formée de vecteurs de $\mathbb{F}$.

D'après le th de la base incomplète :

$$\mathrm{Card}(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})) \leqslant \dim(\mathbb{F})$$

donc $p \leq \dim(\mathbb{F})$

ie $\dim(\mathbb{E}) \leqslant \dim(\mathbb{F})$

---

2. On suppose f surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

On se donne encore $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ une base qcq de $\mathbb{E}$. Donc $\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{Card}(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p}) = p$.

D'après le th34 la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ est génératrice de $\mathbb{F}$.

Donc $\mathrm{Card}(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})) \geqslant \dim \mathbb{F}$

donc $p \geqslant \dim(\mathbb{F})$

ie $\underline{\dim(\mathbb{E}) \geqslant \dim(\mathbb{F})}$

__3.(a)__ C'est une conséquence immédiate de 1. et 2.

__3.(b)__ On suppose $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.

* On sait déjà que :

$$f \text{ bijective} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} f \text{ surjective}$$

$$f \text{ bijective} \overset{\text{def}}{\Longrightarrow} f \text{ injective}$$

* Montrons que : f injective $\Longrightarrow$ f bijective.

On se donne $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ une base qcq de $\mathbb{E}$.

On a donc $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E}) = p$.

Comme f est injective la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ est libre dans $\mathbb{F}$.

Comme $\operatorname{card}(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})) = p = \dim(\mathbb{F})$

la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ est libre maximale dans $\mathbb{F}$ et est donc une base de $\mathbb{F}$.

Comme f transforme une base de $\mathbb{E}$ en une base de $\mathbb{F}$, f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ et donc f est bijective.

* Montrons que : f surjective $\Longrightarrow$ f bijective

Avec les mêmes notations on obtient que la famille $(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p}))$ est génératrice minimale de $\mathbb{F}$ et donc une base de $\mathbb{F}$.

On conclut de même que f est bijective.

Rem : * S'il existe $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire injective et si $\mathbb{F}$ est de dim finie alors $\mathbb{E}$ est aussi de dim finie.

* S'il existe $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire surjective et si $\mathbb{E}$ est de dim finie alors $\mathbb{F}$ est aussi de dim finie

* S'il existe $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire bijective (isomorphisme) et si $\mathbb{E}$ ou $\mathbb{F}$ est de dim finie alors $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont de dim finie