Exemple 1 On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

On définit l'application $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$

$$P \longmapsto \varphi(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \times (X-\alpha)^k$$

* Montrons que φ est linéaire.

Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K}_n[X])^2$.

$$\varphi(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda P + Q)^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda . P^{(k)}(\alpha) + Q^{(k)}(\alpha)}{k!} \times (X-\alpha)^k$$ par linéarité de la dérivation

$$= \lambda . \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} . (X-\alpha)^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$ par linéarité de Σ

$$= \lambda . \varphi(P) + \varphi(Q)$$

* Pour $j \in [\![0, n]\!]$ fixé on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(X^j)^{(k)} = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{si } k \geq j+1 \\ \dfrac{j!}{(j-k)!} X^{j-k} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

donc $$(X^j)^{(k)}(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq j+1 \\ \dfrac{j!}{(j-k)!} \alpha^{j-k} & \text{si } k \leq j \end{cases}$$

Donc :

$$\varphi(X^j) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(X^j)^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \frac{j!}{(j-k)!}\alpha^{j-k} \frac{1}{k!} \times (X-\alpha)^k + \sum_{k=j+1}^{n} 0_{\mathbb{K}[X]}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \alpha^{j-k} \times (X-\alpha)^k$$

$$= \left((X-\alpha)+\alpha\right)^j = X^j = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}(X^j)$$

Donc φ et $\mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}_n(X]$. Elles coïncident donc en tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \varphi(P) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}(P)$$

ie $\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} \times (X-\alpha)^k$

C'est la <u>formule de Taylor pour les polynômes</u>.

Exemple 2

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (2x - z,\ x+y+z)$$

On a déjà montré que f est linéaire et on a déterminé une base de $\mathrm{Im}(f)$ en utilisant l'expression analytique de f.

Ici on propose une nouvelle méthode.

On note $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

D'après le th 32 :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3}) \right)$$

On $f(\vec{e_1}) = f(1,0,0) = (2,1)$

$f(\vec{e_2}) = f(0,1,0) = (0,1)$

$f(\vec{e_3}) = (-1,1)$

Comme $2.f(\vec{e_3}) + f(\vec{e_1}) = 3.f(\vec{e_2})$ on a aussi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_3}) \right)$$

Comme $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_3})$ sont non colinéaires, la famille $\left(f(\vec{e_1}), f(\vec{e_3})\right)$ est libre et est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 3

$$f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto f(P) = P'$$

Même si c'est écrit dans l'énoncé on va vérifier que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ alors $\deg(P) \leq n+1$.

Or $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$

donc $\deg(P') \leq n$ donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour montrer que f est surjective on va montrer que

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

La base canonique de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n, X^{n+1})$.

D'après le th 32 :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^n), f(X^{n+1})\right)$$

Pour $k \in [\![0, n+1]\!]$: $f(X^k) = \begin{cases} kX^{k-1} & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases}$

donc $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(0, 1, 2X, 3X^2, \dots, (n+1)X^n)$

$= \mathrm{Vect}(1, 2X, 3X^2, \dots, (n+1)X^n)$

Les polynômes $1, 2X, 3X^2, \dots, (n+1)X^n$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$

donc $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$.

La famille $(1, 2X, 3X^2, \dots, (n+1)X^n)$ est libre car formée de polynômes non nuls et de degrés échelonnés. Elle est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

On a donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Card}(1, 2X, 3X^2, \dots, (n+1)X^n)$

$= n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

Donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_n[X]$.

Donc f est surjective de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 4. Contre-exemple où $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire et f injective mais non surjective (donc $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont de dimension infinie).

On considère
$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$
$$P \longmapsto X.P(X)$$

* Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]^2$.

Alors $\varphi(\lambda.P + Q) = X.(\lambda P + Q) = \lambda.XP + XQ$
$$= \lambda.\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

* Si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

$\varphi(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $X.P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$: $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$

Donc φ est <u>injectif</u>.

* Si $Q \in \mathrm{Im}(\varphi)$ alors

$\exists P \in \mathbb{K}[X]$, $Q = \varphi(P)$ ie $Q = X \cdot P$

donc $\deg Q = 1 + \deg P$

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ on a $\deg Q \geq 1$

et si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ on a $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$

donc dans tous les cas Q n'est pas constant non nul.

Par contraposée : si Q est constant non nul alors

$Q \notin \mathrm{Im}(\varphi)$.

Donc $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{K}[X]$.

Donc φ n'est pas surjectif.

Exemple 5 On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on considère

$$\varphi : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_n[X]$$
$$P \longmapsto \varphi(P) = P - 2XP'$$

* Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}_n[X]^2$.

On a
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= \lambda P + Q - 2X(\lambda P + Q)' \\ &= \lambda . P + Q - 2X(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda . (P - 2XP') + Q - 2XQ' \\ &= \lambda . \varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $\deg P \leq n$

et $\deg(2XP') = 1 + \deg(P')$
$\leq 1 + n - 1 = n$

Donc $\deg \varphi(P) \leq \max(\deg(P), \deg(2XP')) \leq n$

Donc φ est définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$.

On peut conclure que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

* Montrons que φ est bijective.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Alors $\varphi(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc $P = 2XP'$

On peut avoir $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

notons cX^d son coefficient dominant.

Alors $P = 2XP'$ donne $cX^d = 2dX^d$

donc puisque $c \neq 0$: $1 = 2d$

C'est absurde car d est un entier.

Le seul cas possible est $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Comme $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$ on en déduit

que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

On sait donc que φ est injectif.

Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$

on sait d'après le th 37 que φ est bijectif.

* φ est donc <u>un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$</u>

<u>Exemple 6</u> Contre-exemple d'un endomorphisme surjectif mais non injectif (en dimension infinie).

On considère $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\overset{\shortparallel}{(u_0, u_1, u_2, \dots)} \qquad \overset{\shortparallel}{(u_1, u_2, u_3, \dots)}$$

* Montrons que φ est linéaire.

Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$.

Alors $\varphi(\lambda . u + v) = (\lambda u_{n+1} + v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

$$= \lambda . (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} + (v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

$$= \lambda . \varphi(u) + \varphi(v)$$

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

* Montrons que φ est surjective

On note $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0, u_0, u_1, \dots)$$

Alors $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\varphi(\psi(u)) = u$

donc $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Donc φ est inversible à droite et est donc surjectif

* si $u = (1, 0, 0, \dots)$

alors $\varphi(u) = (0)_{n\in\mathbb{N}}$

donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$

donc φ n'est pas injectif et donc non inversible à gauche

Exemple 7 On fixe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

On note $\mathbb{E} = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} ; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \}$

= ensemble des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On sait montrer que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (TD 13)

donc $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{C}$-ev.

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{E}$ (ie vérifiant la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$) est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1.

Ceci prouve que φ est <u>bijective</u> de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{C}^2$.

De plus on voit facilement que φ est <u>linéaire</u>.

φ est donc un <u>isomorphisme</u> de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{C}^2$.

Donc $\mathbb{E}$ est de dimension finie et

$$\underline{\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{C}^2) = 2}$$

Une base de $\mathbb{E}$ est donc obtenue dès qu'on a deux suites non proportionnelles appartenant à $\mathbb{E}$.

Or cherche les suites géométriques $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathbb{E}$ et telles que $r\in\mathbb{C}^*$:

$$(r^n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{E} \iff \forall n\in\mathbb{N},\quad r^{n+2}=ar^{n+1}+br^n$$

$$\underset{r\neq 0}{\iff} r^2=ar+b$$

$\iff r$ solution de l'équation caractéristique

Si $\Delta\neq 0$ L'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2. Les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non proportionnelles et appartiennent à $\mathbb{E}$. Elles forment donc une base de $\mathbb{E}$: $\mathbb{E}=\text{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}},(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

Donc si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{E}$ alors :

$$\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2;\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\times r_1^n+\mu\times r_2^n$$

Cas $\Delta = 0$ L'équation caractéristique a une racine complexe $r_0 = \frac{a}{2}$. La suite $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathbb{E}$.

Comme $\Delta = a^2 + 4b = 0$ on a $b = \frac{-a^2}{4}$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a(n+1)r_0^{n+1} + b n r_0^n = r_0^n \times \left(a(n+1)r_0 + bn\right)$$

$$= r_0^n \times \left(\frac{a^2}{2}(n+1) + -\frac{a^2}{4}n\right)$$

$$= r_0^n \times \frac{a^2}{4} \times \left(2n+2 - n\right)$$

$$= r_0^n \times r_0^2 \times (n+2) = (n+2) r_0^{n+2}$$

Donc la suite $(n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient elle aussi à $\mathbb{E}$.

Comme elle est non proportionnelle à $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$, les suites $(r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une base de $\mathbb{E}$.

Donc $\mathbb{E} = \text{Vect}\left((r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n r_0^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{E}$ alors :

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n$$

$$= (\lambda + \mu n) r_0^n$$

Example 8 On fixe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

On note $\mathbb{E} = \{ y \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) ;\ \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0 \}$

= ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fois dérivables et solutions de $y'' + ay' + by = 0$

De même on montre que $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{C}^2$, $y \mapsto (y(0), y'(0))$

est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{C}^2$ et on en déduit que $\dim(\mathbb{E}) = 2$.

On cherche $r \in \mathbb{C}^*$ pour que $t \mapsto e^{rt}$ appartienne à $\mathbb{E}$ et on trouve $r^2 + ar + b = 0$.

si $\Delta = 0$ on a deux racines r_1 et r_2 donc $(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$ base de $\mathbb{E}$.

si $\Delta = 0$ on a une seule racine r_0 et on vérifie que $(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto te^{r_0 t})$ est une base de $\mathbb{E}$.