<u>dem prop 28</u>

On a $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}$, $s(\vec{x}) = p(\vec{x}) - q(\vec{x}) = 2p(\vec{x}) - \vec{x}$

donc $s = p - q = 2p - id_E$

<u>1.</u> Comme p et id_E sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$ et comme $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ est un $\mathbb{K}$ev, s est <u>un endomorphisme de $\mathbb{E}$</u>.

<u>2.</u> $s^2 = (2p - id_E)^2 = 4p^2 - 4p + id_E{}^2$

$= 4p - 4p + id_E = \underline{id_E}$.

Donc $s \underline{\in GL(\mathbb{E})}$ et $\underline{s^{-1} = s}$.

<u>3.</u> $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(id_{\mathbb{E}} - p)$

car p est un projecteur.

or $s - id_E = 2.(p - id_E)$ donc $id_E - p = \frac{1}{2}.(id_E - s)$

Donc $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}.(id_E - s)\right) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}.(s - id_E)\right)$

Mais si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ on a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}.f\right)$.

En effet pour $\vec{x} \in \mathbb{E}$: $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \vec{0}_F \Leftrightarrow \frac{1}{2}.f(\vec{x}) = \vec{0}_F$

$\Leftrightarrow \vec{x} \in \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{2}.f\right)$

Donc $\underline{\mathbb{G} = \operatorname{Ker}(s - id_{\mathbb{E}})}$

Mais pour $\vec{x} \in \mathbb{E}$:

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker}(s - id_{\mathbb{E}}) \iff (s - id_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E$$
$$\iff s(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}_E$$
$$\iff s(\vec{x}) = \vec{x}$$

Donc $\underline{\mathbb{G} = \operatorname{Ker}(s - id_E) = \{\vec{x} \in \mathbb{E} ; s(\vec{x}) = \vec{x}\}}$

4. $\mathbb{H} = \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}\left(\frac{1}{2}\cdot(s + id_E)\right) = \underline{\operatorname{Ker}(s + id_E)}$

Mais pour $\vec{x} \in \mathbb{E}$:

$$\vec{x} \in \operatorname{Ker}(s + id_E) \iff (s + id_E)(\vec{x}) = \vec{0}_E$$
$$\iff s(\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}_E$$
$$\iff s(\vec{x}) = -\vec{x}$$

Donc $\underline{\mathbb{H} = \operatorname{Ker}(s + id_E) = \{x \in \mathbb{E} ; s(\vec{x}) = -\vec{x}\}}$