dem th 22 On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$

et $u : \mathbb{G} \to \mathbb{F}$ et $v : \mathbb{H} \to \mathbb{F}$ sont deux applications linéaires.

but il existe une unique application $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire telle que $f_{|\mathbb{G}} = u$ et $f_{|\mathbb{H}} = v$

ie $\forall \vec{x} \in \mathbb{G},\ f(\vec{x}) = u(\vec{x})$ et $\forall \vec{x} \in \mathbb{H},\ f(\vec{x}) = v(\vec{x})$

Existence. Soit $\vec{x} \in \mathbb{E}$ qcq.

Dans la somme directe $\mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$ $\vec{x}$ se décompose sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_G + \vec{x}_H$ où $(\vec{x}_G, \vec{x}_H) \in \mathbb{G} \times \mathbb{H}$

On pose alors $f(\vec{x}) \overset{\text{def}}{=} u(\vec{x}_G) + v(\vec{x}_H) \in \mathbb{F}$

Ceci définit une application $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$.

* Montrons que f est linéaire.

Soit $(\alpha, \vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$.

On note $\vec{x} = \vec{x}_G + \vec{x}_H$ et $\vec{y} = \vec{y}_G + \vec{y}_H$

avec $(\vec{x}_G, \vec{y}_G, \vec{x}_H, \vec{y}_H) \in \mathbb{G}^2 \times \mathbb{H}^2$.

Par déf de f on a :

$$f(\vec{x}) = u(\vec{x}_G) + v(\vec{x}_H)$$
$$f(\vec{y}) = u(\vec{y}_G) + v(\vec{y}_H)$$

On a $\alpha\vec{x}+\vec{y} = \alpha(\vec{x_G}+\vec{x_H}) + \vec{y_G}+\vec{y_H}$

$$= \underbrace{\alpha\vec{x_G}+\vec{y_G}}_{\in \mathbb{G}} + \underbrace{\alpha\vec{x_H}+\vec{y_H}}_{\in \mathbb{H}}$$

On vient de calculer la décomposition de $\alpha\vec{x}+\vec{y}$ dans la somme directe $\mathbb{G}\oplus\mathbb{H}$.

Par def de f on a :

$$f(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = u(\alpha\vec{x_G}+\vec{y_G}) + v(\alpha\vec{x_H}+\vec{y_H})$$

$$= \alpha u(\vec{x_G}) + u(\vec{y_G}) + \alpha . v(\vec{x_H}) + v(\vec{y_H})$$

u et v linéaires

$$= \alpha . \underbrace{(u(\vec{x_G}) + v(\vec{x_H}))}_{= f(\vec{x})} + \underbrace{u(\vec{y_G}) + v(\vec{y_H})}_{= f(\vec{y})}$$

Donc $f(\alpha\vec{x}+\vec{y}) = \alpha . f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

Ceci prouve que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

* Montrons que $f_{|\mathbb{G}} = u$ et $f_{|\mathbb{H}} = v$

ie que $\forall \vec{x} \in \mathbb{G}, f(\vec{x}) = u(\vec{x})$ et $\forall \vec{x} \in \mathbb{H}, f(\vec{x}) = v(\vec{x})$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{G}$ fixé qcq.

Alors la décomposition de $\vec{x}$ dans $\mathbb{G}\oplus\mathbb{H}$ est

$$\vec{x} = \vec{x} + \vec{0_E}$$

Par def de f :

v linéaire

$$f(\vec{x}) = u(\vec{x}) + v(\vec{0}_E) \overset{v \text{ linéaire}}{=} u(\vec{x}) + \vec{0}_F = u(\vec{x})$$

Soit $\vec{x} \in H$ fixé qcq.

Alors la décomposition de $\vec{x}$ dans $G \oplus H$ est

$$\vec{x} = \vec{0}_E + \vec{x}$$

Par def de f :

$$f(\vec{x}) = u(\vec{0}_E) + v(\vec{x}) \underset{u \text{ linéaire}}{=} \vec{0}_F + v(\vec{x}) = v(\vec{x})$$

* Donc f existe.

Unicité Soit $g : E \to F$ linéaire telle que

$g_{|G} = u$ et $g_{|H} = v$. but $f = g$.

On a donc $\begin{cases} \forall \vec{x} \in G, \ g(\vec{x}) = u(\vec{x}) \\ \forall \vec{x} \in H, \ g(\vec{x}) = v(\vec{x}) \end{cases}$

but $\forall \vec{x} \in E, \ g(\vec{x}) = f(\vec{x})$

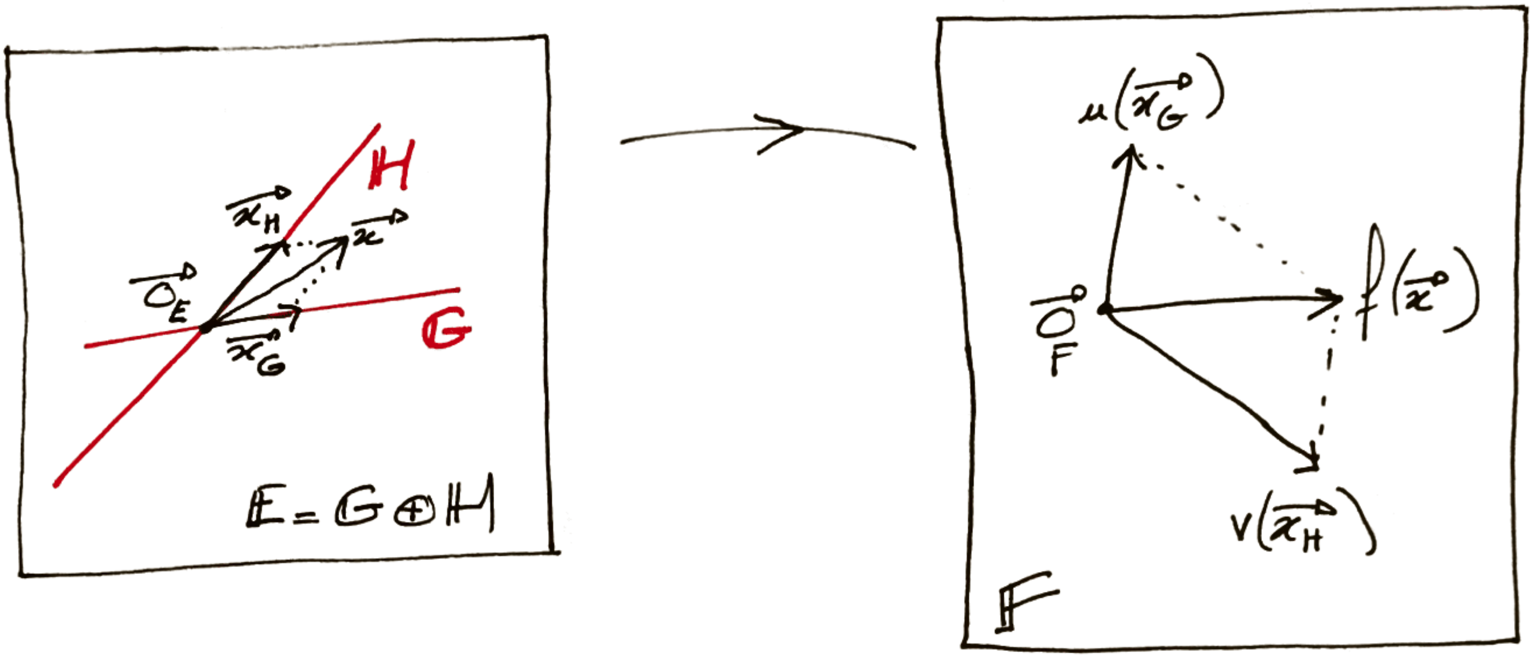
Soit $\vec{x} \in E$ fixé qcq.

Dans $G \oplus H$: $\vec{x} = \vec{x}_G + \vec{x}_H$

Comme g est linéaire : $g(\vec{x}) = g(\vec{x}_G) + g(\vec{x}_H)$

Donc $g(\vec{x}) = u(\vec{x}_G) + v(\vec{x}_H) \overset{\text{def}}{=} f(\vec{x})$

Donc f est unique.



$\mathbb{H}$
$\vec{x}_H$
$\vec{x}$
$\vec{O}_E$
$\mathbb{G}$
$\vec{x}_G$
$\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$
$u(\vec{x}_G)$
$f(\vec{x})$
$\vec{O}_F$
$v(\vec{x}_H)$
$\mathbb{F}$