<u>dem th 26</u> Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

On veut montrer que :

p est une projection $\Longleftrightarrow$ p est un projecteur

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que p est une projection.

D'après la proposition précédente $p \circ p = p$

Donc p est un projecteur.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que p est un projecteur ie $p \circ p = p$

<u>but</u> p est une projection ie

il existe G et H sev de E tq $\begin{cases} E = G \oplus H \\ p_{|G} = id_G \\ p_{|H} = 0_{\mathcal{L}(H)} \end{cases}$

On pose $G = Im(p)$ et $H = Ker(p)$

* Comme p est linéaire : G et H sont des sev de E.

* Montrons que $E = G \oplus H$ par analyse-synthèse.

Soit $\vec{x} \in E$ fixé qcq.

Analyse On suppose que la décomposition de $\vec{x}$ existe : $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$

avec $\vec{a} \in G$ et $\vec{b} \in H$

On a $\begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \\ \exists \vec{t} \in E,\ \vec{a} = p(\vec{t}) & \text{puisque } \vec{a} \in \mathrm{Im}(p) \\ p(\vec{b}) = \vec{0_E} & \text{puisque } \vec{b} \in \mathrm{Ker}(p) \end{cases}$

Donc $\vec{x} = p(\vec{t}) + \vec{b}$

Par linéarité de p :

$$p(\vec{x}) = p^2(\vec{t}) + p(\vec{b})$$
$$= p(\vec{t}) + \vec{0_E} \quad \text{car } p^2 = p$$
$$= \vec{a}$$

Donc $\begin{cases} \vec{a} = p(\vec{x}) \\ \vec{b} = \vec{x} - p(\vec{x}) \end{cases}$

Ainsi si la décomposition de $\vec{x}$ existe alors elle est unique

Synthèse On pose $\vec{a} \overset{\text{def}}{=} p(\vec{x})$ et $\vec{b} \overset{\text{def}}{=} \vec{x} - p(\vec{x})$.

* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{x}$
* $\vec{a} \in \mathrm{Im}(p)$ donc $\vec{a} \in G$
* $p(\vec{b}) = p(\vec{x}) - p^2(\vec{x})$ car p linéaire

$$= p(\vec{x}) - p(\vec{x}) \quad \text{car } p^2 = p$$
$$= \vec{0_E}$$

donc $\vec{b} \in \mathrm{Ker}(p)$ donc $\vec{b} \in H$

Donc la décomposition de $\vec{x}$ existe.

Ccl La décomposition de $\vec{x}$ existe et elle est unique.

On a donc $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$

* Il reste à montrer que $p_{|\mathbb{G}} = id_{\mathbb{G}}$ et $p_{|\mathbb{H}} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$

ie que $\forall \vec{x} \in \mathbb{G},\ p(\vec{x}) = \vec{x}$ et $\forall \vec{x} \in \mathbb{H},\ p(\vec{x}) = \vec{0}_E$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{G}$ fixé qcq.

Comme $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p)$: $\exists \vec{t} \in \mathbb{E},\ \vec{x} = p(\vec{t})$

Donc $p(\vec{x}) = p^2(\vec{t}) \underset{p^2 = p}{=} p(\vec{t}) = \vec{x}$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{H}$ fixé qcq.

Comme $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$: $p(\vec{x}) = \vec{0}_E$.

On a donc montré que p est la projection sur $\mathbb{G} = \mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$