<u>dem th 29</u> Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.

Montrons que :

$$s \text{ est une symétrie} \iff s \circ s = id_E$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ C'est le point 2. de la proposition précédente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $s \circ s = id_E$.

<u>but</u> s est une symétrie

ie il existe G et H sev de E tels que

$$\begin{cases} E = G \oplus H \\ s_{|G} = id_G \\ s_{|H} = -id_H \end{cases}$$

On pose $p = \frac{1}{2} \cdot (s + id_E)$

Alors $p^2 = \frac{1}{4}(s^2 + 2s + id_E) \underset{\substack{\uparrow \\ s^2 = id_E}}{=} \frac{1}{2}(s + id_E) = p$

donc p est un projecteur.

Donc si on pose $G = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(id_E - p)$

et $H = \mathrm{Ker}\, p$ on a $\begin{cases} E = G \oplus H \\ p_{|G} = id_G \\ p_{|H} = 0_{\mathcal{L}(H)} \end{cases}$

Mais $s = 2p - id_E$

donc $\forall \vec{x} \in G$, $s(\vec{x}) = 2p(\vec{x}) - \vec{x}$

$= 2\vec{x} - \vec{x} = \vec{x}$

$p_{|G} = id_G$

donc $s_{|G} = id_G$.

Et $\forall \vec{x} \in H$, $s(\vec{x}) = 2p(\vec{x}) - \vec{x}$

$= 2 \cdot \vec{O_E} - \vec{x} = -\vec{x}$

donc $s_{|H} = -id_H$

Donc s est la symétrie par rapport à H parallèlement à G.