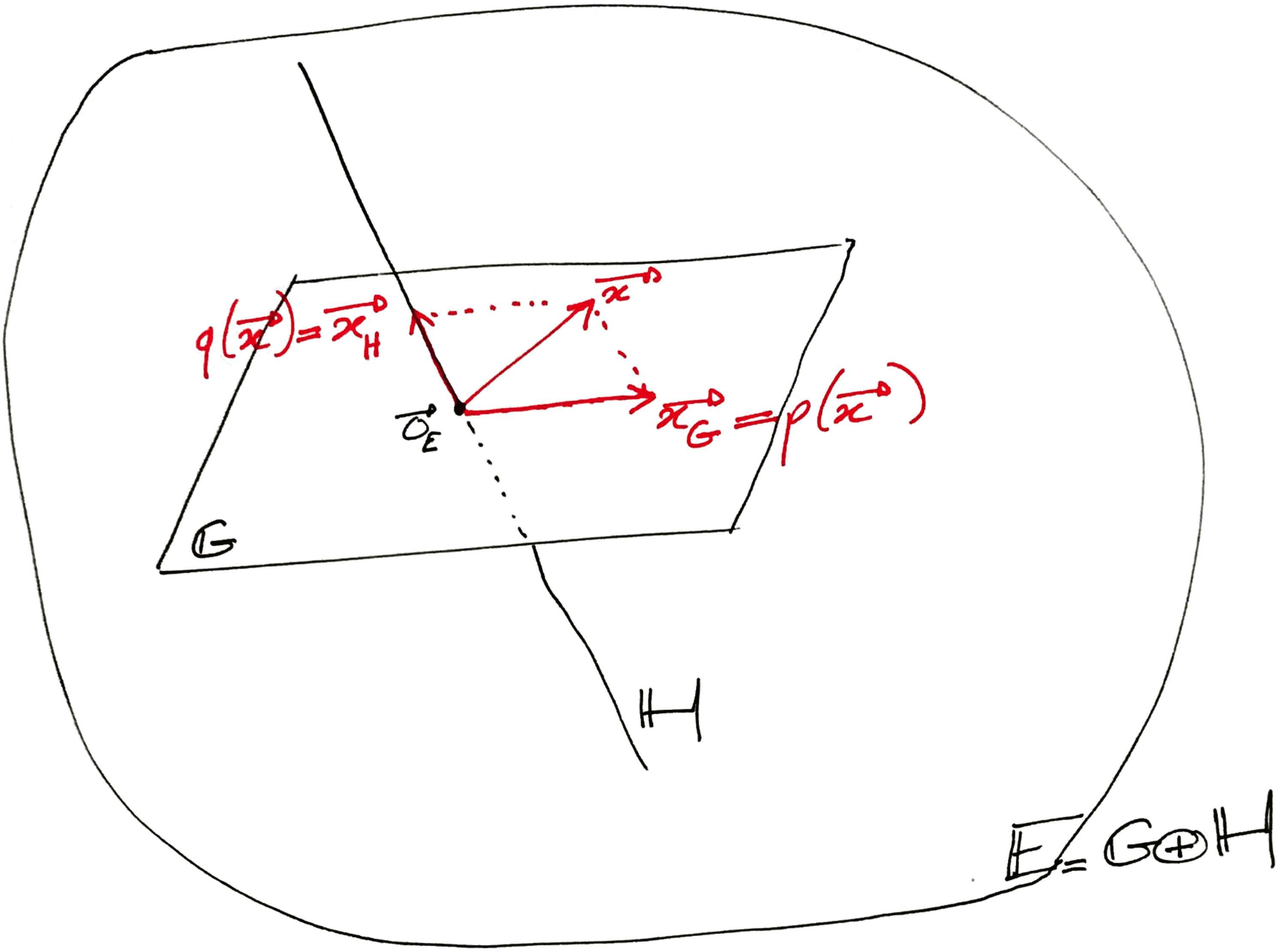


$q(\vec{x}) = \vec{x}_H$
$\vec{x}$
$\vec{O}_E$
$\vec{x}_G = p(\vec{x})$
$\mathbb{G}$
$\mathbb{H}$
$\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$

Exemple 1

Lorsqu'on a montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ par analyse-synthèse on a trouvé que la décomposition d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n(\mathbb{K})}$$

Donc si p est la projection sur $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ alors :

$$\boxed{p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)}$$

Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$

$\vec{e_1} = (1,0)$ et $\vec{e_2} = (0,1)$

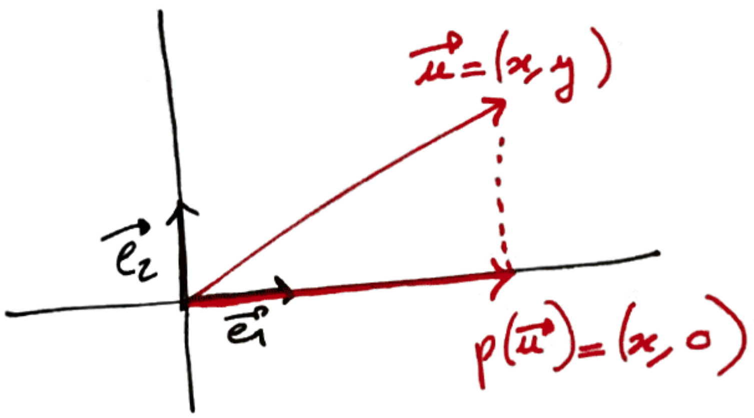
$G = \mathrm{Vect}(\vec{e_1})$ et $H = \mathrm{Vect}(\vec{e_2})$

p projection sur G parallèlement à H

Si $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} = \underbrace{x\vec{e_1}}_{\in G} + \underbrace{y\vec{e_2}}_{\in H}$$

donc $p(\vec{u}) = x\vec{e_1}$ ie $\boxed{p(x,y) = (x,0)}$



⚠ * En général si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ on a :

$$\begin{cases} \mathrm{Ker}(-f) = \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Im}(-f) = \mathrm{Im}(f) \end{cases}$$

En effet si $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(-f)$ alors $-f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$

donc $f(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{F}}$ donc $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(f)$.

Donc $\mathrm{Ker}(-f) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en réitérant}}}{\subseteq} \mathrm{Ker}(-f)$

Et si $\vec{y} \in \mathrm{Im}(-f)$ alors $\exists \vec{t} \in \mathbb{E}, \vec{y} = -f(\vec{t})$

donc $\vec{y} = f(-\vec{t})$ donc $\vec{y} \in \mathrm{Im}(f)$.

Donc $\mathrm{Im}(-f) \subseteq \mathrm{Im}(f) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{en réitérant}}}{\subseteq} \mathrm{Im}(-f)$

* On en déduit que $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(id_{\mathbb{E}} - p) = \mathrm{Ker}(p - id_{\mathbb{E}})$

$\mathbb{H} = \mathrm{Im}(id_{\mathbb{E}} - p) = \mathrm{Im}(p - id_{\mathbb{E}})$

* Mais $(p - id_{\mathbb{E}}) \circ (p - id_{\mathbb{E}}) = p^2 - 2p + id_{\mathbb{E}} = id_{\mathbb{E}} - p$

$\neq p - id_{\mathbb{E}}$

donc d'après 3., $p - id_{\mathbb{E}}$ n'est pas une projection.

Exemple 3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme $p \circ id_E = id_E \circ p = p$ on a :

$$(p+id_E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . \underbrace{p^k \circ \underbrace{id_E^{\,n-k}}_{=id_E}}_{=p^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . p^k$$

Mais $p^2 = p$ donc $p^3 = p^2 = p$ ....

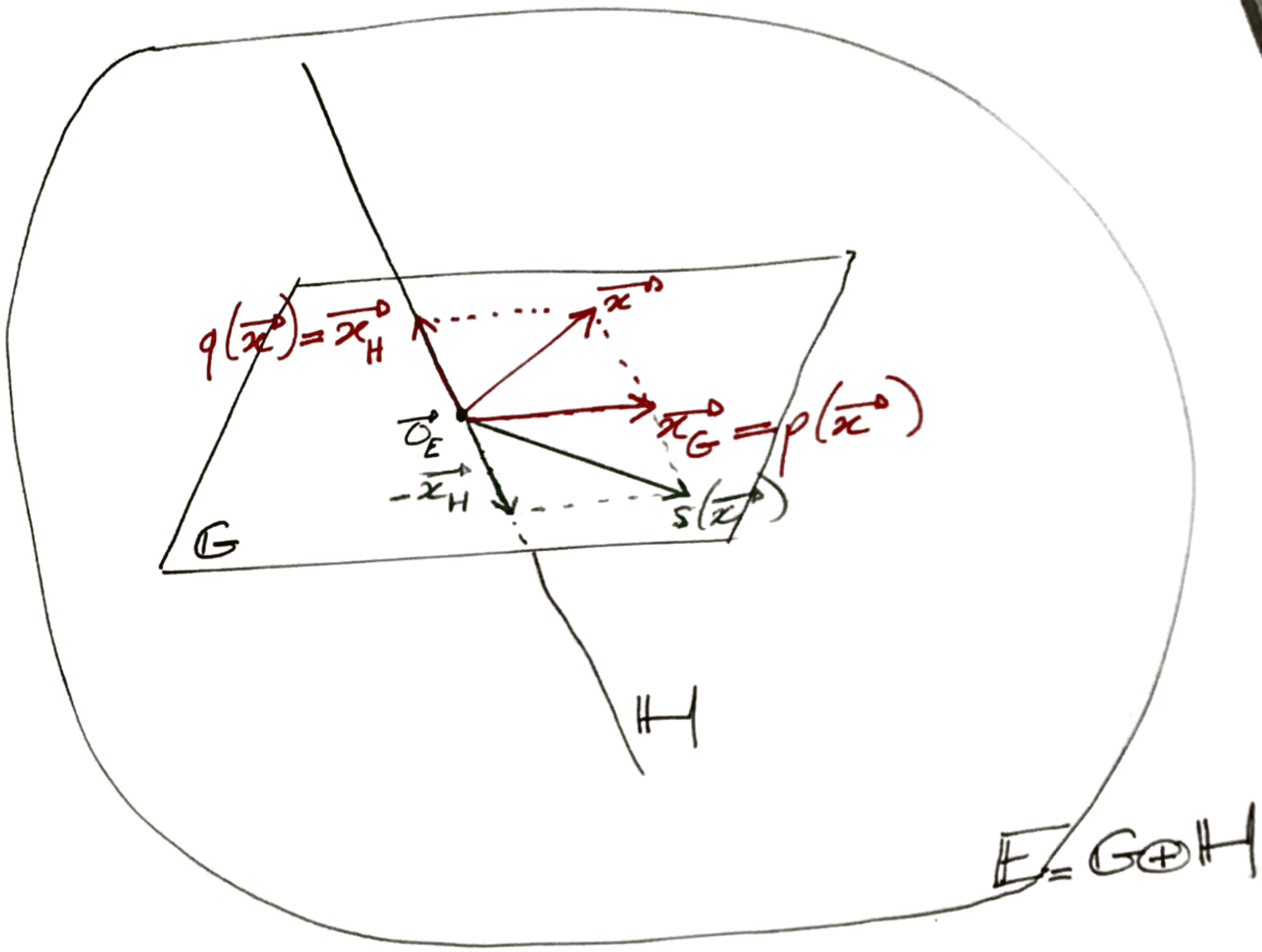
Par récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p^k = p$

Donc $$(p+id_E)^n = \binom{n}{0} . id_E + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} . p$$

$$= id_E + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) . p$$

$$= id_E + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 1 \right) . p$$

$$\boxed{(p+id_E)^n = id_E + (2^n - 1) . p}$$



$q(\vec{x}) = \vec{x}_H$
$\vec{x}$
$\vec{x}_G = p(\vec{x})$
$\vec{O}_E$
$-\vec{x}_H$
$s(\vec{x})$
$\mathbb{G}$
$\mathbb{H}$
$\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$

<u>Exemple 4</u> On a vu au chapitre de calcul matriciel que :

$$\forall (\lambda, A, B) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad {}^t(\lambda A + B) = \lambda\, {}^tA + {}^tB$$

Donc l'application $A \overset{\varphi}{\longmapsto} {}^tA$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ {}^t({}^tA) = A$ ie $\varphi^2 = id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

donc $A \overset{\varphi}{\longmapsto} {}^tA$ est une symétrie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

En particulier : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Ker}(\varphi - id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})$

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} A \in \operatorname{Ker}(\varphi - id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) &\iff \varphi(A) - A = 0_n \\ &\iff {}^tA = A \\ &\iff A \in S_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi - id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = S_n(\mathbb{K})$

et de même $\operatorname{Ker}(\varphi + id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = A_n(\mathbb{K})$

On a donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$

Exemple 5

$$s : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$
$$f \longmapsto g$$

où $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(-x)$

On a donc $g = s(f)$ et $\forall x \in \mathbb{R}, s(f)(x) = f(-x)$

s est linéaire car si $(\alpha, f_1, f_2) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ s(\alpha f_1 + f_2)(x) = (\alpha f_1 + f_2)(-x)$$
$$= \alpha f_1(-x) + f_2(-x)$$
$$= \alpha . s(f_1)(x) + s(f_2)(x)$$
$$= (\alpha . s(f_1) + s(f_2))(x)$$

Donc $s(\alpha f_1 + f_2) = \alpha . s(f_1) + s(f_2)$

s est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

De plus pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ s(s(f))(x) = f(-(-x)) = f(x)$$

donc $s(s(f)) = f$

Donc $s \circ s = id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$.

s est donc une symétrie

On a donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Ker}(s - id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) \oplus \mathrm{Ker}(s + id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}})$

Mais pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(s - id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) &\Longleftrightarrow s(f) = f \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est paire} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(s - id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ est paire} \}$

et : $$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(s + id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) &\Longleftrightarrow s(f) = -f \\ &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \\ &\Longleftrightarrow f \text{ est impaire} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(s + id_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}) = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ est impaire} \}$