Exemple 1

Soit $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{E}^2$.

Alors $0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \vec{0}_{\mathbb{F}} = \vec{0}_{\mathbb{F}} + \vec{0}_{\mathbb{F}}$

$$= 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(\vec{x_1}) + 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(\vec{x_2})$$

Soit $(\alpha, \vec{x_1}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}$.

Alors $0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(\alpha . \vec{x_1}) = \vec{0}_{\mathbb{F}} = \alpha . \vec{0}_{\mathbb{F}} = \alpha . 0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(\vec{x_1})$

Donc $0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}$ est une application linéaire :

$$0_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \in \mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}).$$

dem th 2 $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est une application.

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ On suppose que f est linéaire.

but $\forall (\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2, \; f(\alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

On fixe $(\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$ qcq.

Comme f est linéaire on a d'après 1. :

$$f(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\alpha . \vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$$

Et d'après 2. : $f(\alpha \vec{x_1}) = \alpha . f(\vec{x_1})$

Donc $f(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ On suppose que :

$$\forall (\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2, \; f(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$$

Pour $\alpha = 1$: $\forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{E}^2, \; f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$

donc 1. de la def 1 est vrai.

En particulier si $\vec{x_1} = \vec{x_2} = \vec{0_{\mathbb{E}}}$:

$$f(\vec{0_{\mathbb{E}}}) = f(\vec{0_{\mathbb{E}}}) + f(\vec{0_{\mathbb{E}}})$$

donc $f(\vec{0_{\mathbb{E}}}) = \vec{0_{\mathbb{F}}}$

Et alors si on repart de (ii) avec $\vec{x_2} = \vec{0_{\mathbb{E}}}$:

$\forall (\alpha, \vec{x_1}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}, \quad f(\alpha . \vec{x_1}) = \alpha . f(\vec{x_1}) + f(\vec{0_{\mathbb{E}}})$

$$= \alpha . f(\vec{x_1}) + \vec{0_{\mathbb{F}}} = \alpha . f(\vec{x_1})$$

Donc f <u>est linéaire</u>.

<u>Ex 2</u> Montrons que $id_{\mathbb{E}}$ est linéaire.

Soit $(\alpha, \vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$.

$id_{\mathbb{E}}(\alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}$

et $\alpha . id_{\mathbb{E}}(\vec{x_1}) + id_{\mathbb{E}}(\vec{x_2}) = \alpha \vec{x_1} + \vec{x_2}$

donc $id_{\mathbb{E}}(\alpha . \vec{x_1} + \vec{x_2}) = \alpha . id_{\mathbb{E}}(\vec{x_1}) + id_{\mathbb{E}}(\vec{x_2})$

Donc $id_{\mathbb{E}}$ est <u>linéaire</u>.

Exemple 3

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\vec{u} = (x,y,z) \longmapsto f(\vec{u}) = f(x,y,z) = (2x - z,\ x+y+z)$$

Soit $(\alpha, \vec{u_1}, \vec{u_2}) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3)^2$.

On note $\vec{u_1} = (x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{u_2} = (x_2, y_2, z_2)$

Alors $\alpha\vec{u_1} + \vec{u_2} = (\underbrace{\alpha x_1 + x_2}_{=X}, \underbrace{\alpha y_1 + y_2}_{=Y}, \underbrace{\alpha z_1 + z_2}_{=Z})$

Donc
$$\begin{aligned}
f(\alpha\vec{u_1} + \vec{u_2}) &= f(X, Y, Z) \\
&= (2X - Z, X + Y + Z) \\
&= (2\alpha x_1 + 2x_2 - \alpha z_1 - z_2, \alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 + \alpha z_1 + z_2) \\
&= \alpha . (2x_1 - z_1, x_1 + y_1 + z_1) + (2x_2 - z_2, x_2 + y_2 + z_2) \\
&= \alpha . f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2) \\
&= \alpha . f(\vec{u_1}) + f(\vec{u_2})
\end{aligned}$$

Exemple 4

$$S : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$\vec{u} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto S(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Soit $(\alpha, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K}^n)^2$.

On note $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\vec{v} = (y_1, \dots, y_n)$

Alors $\alpha\vec{u} + \vec{v} = (\underbrace{\alpha x_1 + y_1}_{= z_1}, \dots, \underbrace{\alpha x_n + y_n}_{= z_n})$

Donc $S(\alpha\vec{u} + \vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} (\alpha x_k + y_k)$

$= \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k$ par linéarité de la somme

$= \alpha . S(\vec{u}) + S(\vec{v})$

Donc <u>S est linéaire</u>.

Exemple 5

$$I : \begin{array}{ccc} C^0([a,b];\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t)\,dt \end{array}$$

Soit $(\alpha, f, g) \in \mathbb{R} \times (C^0([a,b];\mathbb{R}))^2$.

$$I(\alpha f + g) = \int_a^b (\alpha f(t) + g(t))\,dt$$

$$= \alpha \cdot \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$ par linéarité de l'intégrale

$$= \alpha \cdot I(f) + I(g)$$

Donc I est linéaire.

Exemple 6 $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$,

$P \longmapsto f(P) = P'$

Soit $(\alpha, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]^2$.

$$f(\alpha P + Q) = (\alpha . P + Q)'$$

$$= \alpha . P' + Q' \quad \text{par linéarité de la dérivation}$$

$$= \alpha . f(P) + f(Q)$$

Donc f est linéaire.

dem prop 3

1. Déjà vu dans la preuve du th 2.

2. D'après le th 2 avec $\alpha=-1$ et en échangeant $\vec{x_1}$ et $\vec{x_2}$:

$$\forall(\vec{x_1},\vec{x_2})\in\mathbb{E}^2,\quad f(-\vec{x_2}+\vec{x_1})=-f(\vec{x_2})+f(\vec{x_1})$$

$$\text{donc } f(\vec{x_1}-\vec{x_2})=f(\vec{x_1})-f(\vec{x_2})$$

Pour $\vec{x_1}=\vec{0}_{\mathbb{E}}$ on a $f(\vec{x_1})=\vec{0}_{\mathbb{F}}$ d'après 1.

Donc $\forall \vec{x_2}\in\mathbb{E},\ f(-\vec{x_2})=-f(\vec{x_2})$

3. C'est vrai pour $n=2$ d'après le th 2.

On généralise par récurrence sur l'entier n.