dem th 21 On fixe $v \in \mathbb{F}$ et on suppose $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ linéaire

1. On suppose que $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$ et qu'on connaît $\vec{u_0} \in \mathbb{E}$ tel que $f(\vec{u_0}) = \vec{v}$.

Alors pour tout $\vec{u} \in \mathbb{E}$:

$$
\begin{aligned}
f(\vec{u}) = v &\iff f(\vec{u}) = f(\vec{u_0}) \\
&\iff f(\vec{u} - \vec{u_0}) = \vec{0_{\mathbb{F}}} \\
&\iff \vec{u} - \vec{u_0} \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\iff \exists \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) ; \vec{u} = \vec{u_0} + \vec{x}
\end{aligned}
$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(\vec{u}) = \vec{v}$ d'inconnue $\vec{u} \in \mathbb{E}$ est :

$$\mathcal{S} = \{ \vec{u_0} + \vec{x} \in \mathbb{E} ; \vec{x} \in \mathrm{Ker}(f) \}$$

solution particulière de $f(\vec{u}) = \vec{v}$

solution générale de l'équation homogène $f(\vec{u}) = \vec{0}$

2. Par contraposée si $\exists \vec{u} \in \mathbb{E}$, $f(\vec{u}) = \vec{v}$ alors $f(\vec{u}) \in \mathrm{Im}(f)$ donc $\vec{v} \in \mathrm{Im}(f)$.

Donc si $\vec{v} \notin \mathrm{Im}(f)$ alors l'équation $f(\vec{u}) = \vec{v}$ n'a pas de solution.