dem th42 On suppose $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire

1. On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

On se donne $(\vec{\varepsilon_1}, \ldots, \vec{\varepsilon_p})$ une base de $\mathbb{E}$ (donc $p = \dim \mathbb{E}$)

D'après le th 32 : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{\varepsilon_1}), \ldots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$

Donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dim finie et :

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \mathrm{Card}\left(f(\vec{\varepsilon_1}), \ldots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$$

Donc f est de rang fini et :

$$\mathrm{rg}(f) \leq p = \dim(\mathbb{E})$$

De plus : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{E})$

$\iff \left(f(\vec{\varepsilon_1}), \ldots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$

$\iff \left(f(\vec{\varepsilon_1}), \ldots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$ est libre

$\underset{\text{th33}}{\iff}$ f est injective

2. On suppose que $\mathbb{F}$ est de dimension finie

$\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$ donc $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathbb{F})$.

Donc f est de rang fini et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{F})$

De plus : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{F})$

$\iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$

$\iff f$ est surjective.