dem th 44 On suppose que $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est linéaire et que $\mathbb{E}$ est de dim finie.

* $\operatorname{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$. Comme $\mathbb{E}$ est de dim finie, il existe $\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$ tq $\mathbb{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \mathbb{H}$.

On a donc $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\mathbb{H})$.

* On considère ensuite la restriction $f_{|\mathbb{H}}^{|\operatorname{Im} f} : \mathbb{H} \to$.

On sait qu'elle est linéaire (th 4) et que

$$\operatorname{Ker}\left(f_{|\mathbb{H}}^{|\operatorname{Im} f}\right) = \operatorname{Ker}(f) \cap \mathbb{H} \quad (\text{remarque p } 442)$$

Comme $\mathbb{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \mathbb{H}$:

$$\operatorname{Ker}\left(f_{|\mathbb{H}}^{|\operatorname{Im} f}\right) = \{\vec{0}_E\}.$$

Donc $f_{|\mathbb{H}}^{|\operatorname{Im} f}$ est injective.

Montrons qu'elle est surjective de $\mathbb{H}$ vers $\operatorname{Im}(f)$.

Soit $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$ fixé qcq.

but $\exists \vec{x} \in \mathbb{H} ; \vec{y} = f_{|\mathbb{H}}^{|\operatorname{Im} f}(\vec{x})$

Comme $\vec{y} \in \operatorname{Im}(f)$ on sait que $\exists \vec{F} \in \mathbb{E} ; \vec{y} = f(\vec{F})$

Comme $\mathbb{E} = Ker(f) \oplus \mathbb{H}$ on peut écrire

$\vec{F} = \vec{x} + \vec{x'}$ avec $\vec{x} \in \mathbb{H}$ et $\vec{x'} \in Ker(f)$.

Alors par linéarité de f :

$$\vec{y} = f(\vec{F}) = f(\vec{x}) + f(\vec{x'}) \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{x'} \in Ker(f)}}{=} f(\vec{x}) + \vec{0_F}$$

Donc $\vec{y} = f(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathbb{H}$

donc $\vec{y} = f_{|\mathbb{H}}^{|Im f}(\vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathbb{H}$.

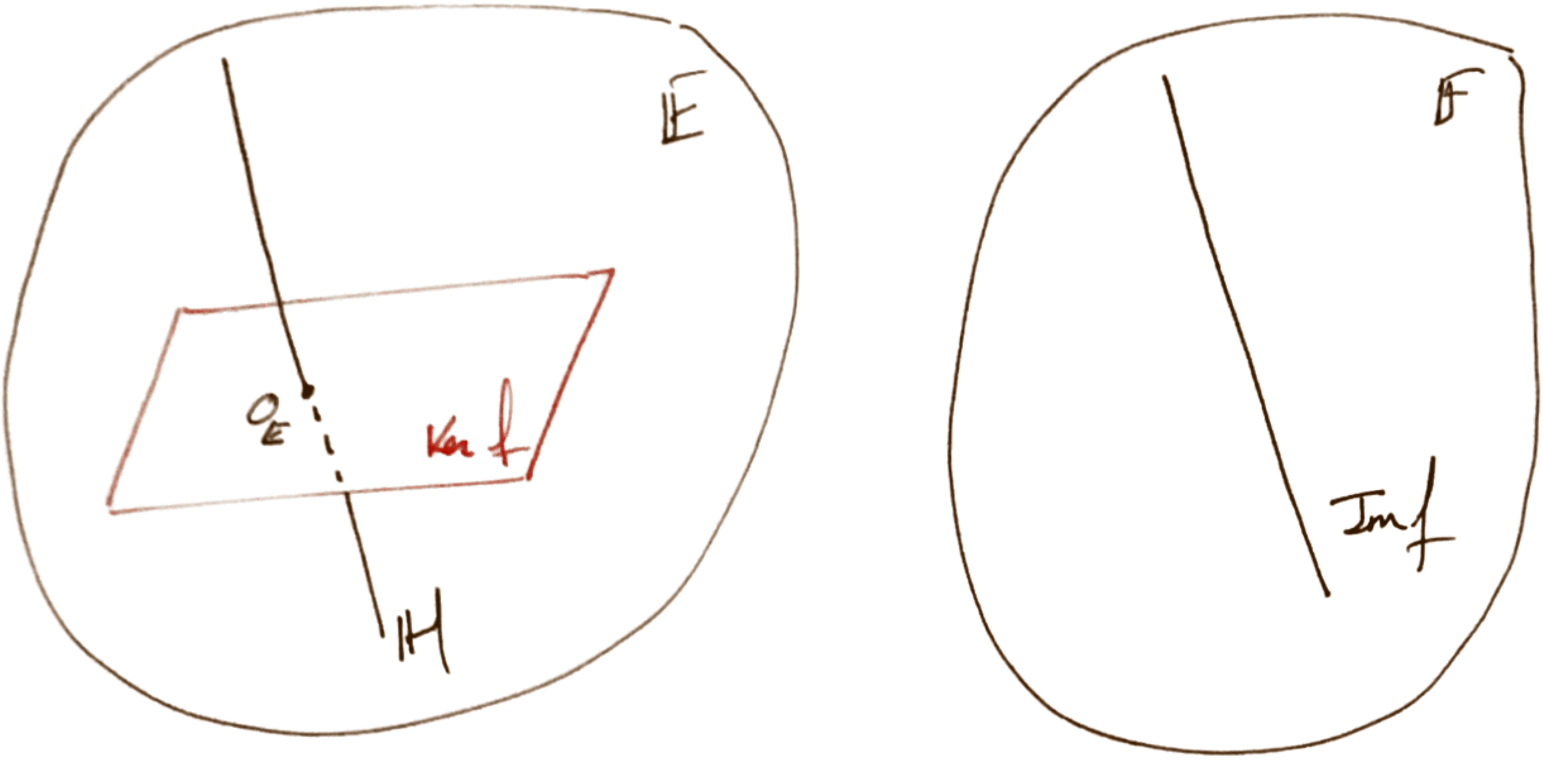
Ceci prouve que $f_{|\mathbb{H}}^{|Im f}$ est surjective de $\mathbb{H}$ vers $Im(f)$.

L'application $f_{|\mathbb{H}}^{|Im f}$ est donc un isomorphisme de $\mathbb{H}$ vers $Im(f)$.

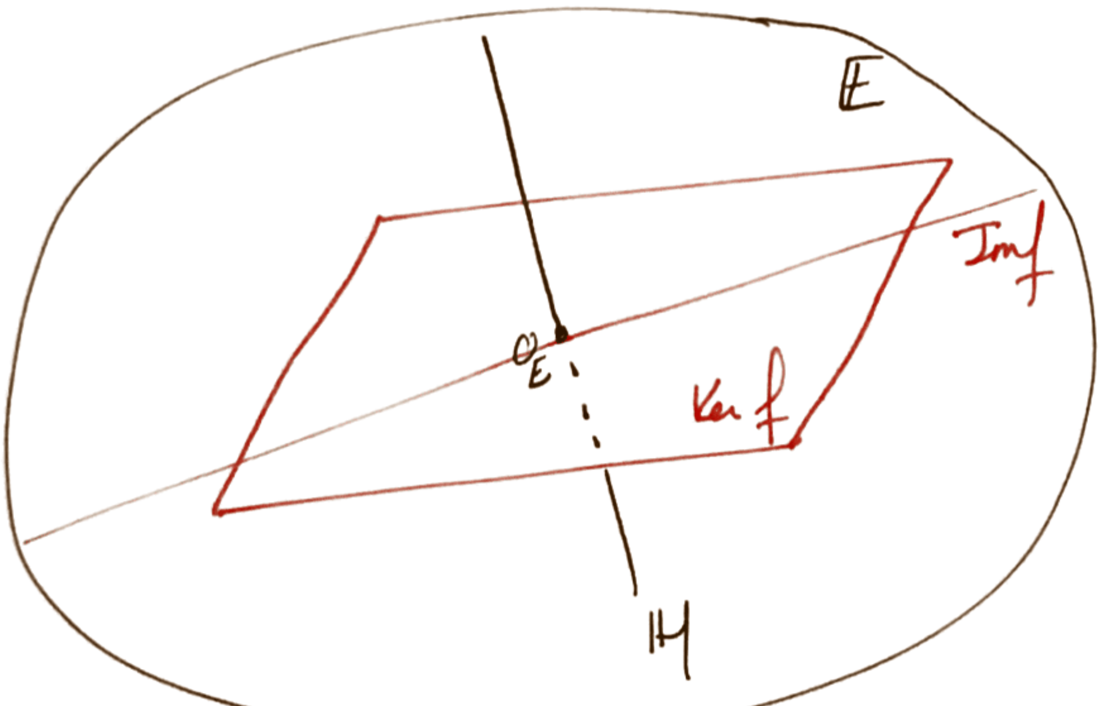
* D'après le th37 on a donc $\dim(\mathbb{H}) = \dim(Im f)$.

Ainsi $\dim(\mathbb{E}) = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$

$$\dim(\mathbb{E}) = \dim(Ker f) + rg(f)$$



Pour un endomorphisme



Sur cet exemple $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$