Exemple 1 On suppose $f : E \to F$ linéaire

$$\mathrm{rg}(f) = 0 \iff \mathrm{Im}(f) = \{0_F\} \iff f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

<u>Rem:</u> si $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_p})$ est une base de E

on sait d'après le th 32 que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$$

donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)\right)$

ie $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(f(\vec{\varepsilon_1}), \dots, f(\vec{\varepsilon_p})\right)$

rang d'une application linéaire

rang d'une famille de vecteurs (chap 15)

<u>dem cor 43</u> On suppose $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ linéaire

et $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) = n$

On a :

f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$

$\Longleftrightarrow$ f est bijective

$\Longleftrightarrow$ f est injective et surjective

$\Longleftrightarrow$ $rg(f) = \dim(\mathbb{E})$ et $rg(f) = \dim(\mathbb{F})$

$\Longleftrightarrow$ $rg(f) = n$.

Exemple 2

On suppose $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ linéaires.

Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F on peut considérer l'application $g_{|\mathrm{Im}(f)} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow G$ qui est encore linéaire.

D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim\left(\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}\, f})\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}\, f})\right)$$

or $\mathrm{Ker}(g_{|\mathrm{Im}\, f}) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$

et
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(g_{|\mathrm{Im}\, f}) &= \{ g(\vec{y}) \in G \,;\, \vec{y} \in \mathrm{Im}\, f \} \\ &= \{ g(f(\vec{x})) \in G \,;\, \vec{x} \in E \} \\ &= \mathrm{Im}(g \circ f)\end{aligned}$$

Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$

Donc $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))$