Chapitre 17

Applications linéaires

Sommaire

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ désignent deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 – Application linéaire

Soit f une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$. On dit que f est *linéaire* lorsque :

1. $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{E}^2, \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
2. $\forall (\alpha, x_1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}, \quad f(\alpha.x_1) = \alpha.f(x_1)$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$: c'est donc une partie de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$, ensemble de toutes les applications de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Vocabulaire et notations.

- Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ est noté plus simplement $\mathscr{L}(\mathbb{E})$. Les éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ sont appelés *endomorphismes de* $\mathbb{E}$.
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f est appelée *isomorphisme de* $\mathbb{E}$ *sur* $\mathbb{F}$.
- Si f est à la fois un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, c'est-à-dire que $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est linéaire et bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, alors f est appelée *automorphisme de* $\mathbb{E}$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $GL(\mathbb{E})$.
- Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ alors les applications linéaires $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont appelées *formes linéaires sur* $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Application nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

$$O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} : \begin{array}{ccl} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ x & \longmapsto & O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}(x) = 0_{\mathbb{F}} \end{array}$$

Elle est linéaire, donc $O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Théorème 2 – Critère de linéarité

Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une application. On a équivalence de :

(i) f est linéaire

(ii) $\forall (\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2$, $f(\alpha.x_1 + x_2) = \alpha.f(x_1) + f(x_2)$

C'est ce critère qu'on utilise en pratique pour montrer qu'une application est linéaire.

✎ ***Exemple.*** Application identité de $\mathbb{E}$.

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_{\mathbb{E}}: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{id}_{\mathbb{E}}(x) = x \end{array}$$

Elle est linéaire et bijective, donc $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in GL(\mathbb{E})$.

✎ ***Exemple.*** Un exemple de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & u=(x,y,z) & \longmapsto & f(u) = f(x,y,z) = (2x-z, x+y+z) \end{array}$$

Elle est linéaire, ce qui se note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

✎ ***Exemple.*** Somme des composantes d'un n-uplet de $\mathbb{K}^n$.

$$\begin{array}{rccc} S: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & u=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & S(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Elle est linéaire, donc S est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

✎ ***Exemple.*** Intégrale d'une fonction continue. On note $C^0([a,b];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction numériques continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles.

$$\begin{array}{rccc} I: & C^0([a,b];\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Elle est linéaire, donc I est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([a,b])$.

✎ ***Exemple.*** Dérivation des polynômes.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & f(P) = P' \end{array}$$

Elle est linéaire, c'est donc un endomophisme de $\mathbb{R}[X]$: $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$.

Proposition 3 – Propriétés des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{E}^2,\ \ f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$ donc $\forall x_1 \in \mathbb{E},\ \ f(-x_1) = -f(x_1)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{E}^n, \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f(x_k)$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

1.2.1 Restriction

Soit f une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Théorème 4 – Restriction d'une application linéaire à un sev

Si $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, et si $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$ tels que $f(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{H}$, alors $f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}}$ est linéaire de $\mathbb{G}$ vers $\mathbb{H}$.

Autrement dit, la restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel est encore une application linéaire.

1.2.2 Somme et multiplication par un scalaire

Si $(f, g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit les applications $f + g : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $\alpha.f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{E}, \quad \begin{aligned} (f+g)(x) &\overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \\ (\alpha.f)(x) &\overset{\text{def}}{=} \alpha.f(x) \end{aligned}$$

Proposition 5 – Opérations dans $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

On a $f + g \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\alpha.f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

Corollaire 6 – Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$

Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ muni des deux opérations ci-dessus est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$).

En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

1.2.3 Composition

Théorème 7 – Composition d'applications linéaires

On se donne un troisième $\mathbb{K}$-ev noté $\mathbb{G}$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{G})$.
2. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ et g est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{G}$.
3. Si f et g sont deux automorphismes de $\mathbb{E}$, alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Proposition 8 – Règles de calcul dans $(\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}),+,.,\circ)$

On se donne $(f_1,f_2)\in\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})^2$ et $(g_1,g_2)\in\mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})^2$.

1. $\circ$ est distributive par rapport à $+$:
   $g_1\circ(f_1+f_2)=g_1\circ f_1+g_1\circ f_2$ et $(g_1+g_2)\circ f_1=g_1\circ f_1+g_2\circ f_1$.
2. Si $\alpha\in\mathbb{K}$: $g_1\circ(\alpha.f_1)=\alpha.(g_1\circ f_1)=(\alpha.g_1)\circ f_1$.

Rappelons que $\circ$ est aussi associative, mais non commutative : $g\circ f\neq f\circ g$ en général.

Définition 9 – Puissance d'un endomorphisme

Si $f\in\mathscr{L}(\mathbb{E})$, on pose $f^0=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{n+1}=f\circ f^n$.
On a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois}}$.

D'après les résultats précédents, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^n\in\mathscr{L}(\mathbb{E})$.

Proposition 10 – Règles de calcul

Si $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, on a : $(f^n)^p=f^{np}=(f^p)^n$ et $f^n\circ f^p=f^{n+p}=f^p\circ f^n$.

Par contre, en général : $(g\circ f)^n\neq g^n\circ f^n$.

Lemme 11 – Puissance d'une composée

Si $(f,g)\in\mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g\circ f=f\circ g$, alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(g\circ f)^n=g^n\circ f^n$.

On dispose même d'une formule du binôme.

Théorème 12 – Formule du binôme de Newton, version endomorphisme

Si $(f,g)\in\mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g\circ f=f\circ g$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad (f+g)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.f^k\circ g^{n-k}=(g+f)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.g^k\circ f^{n-k}$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $g\circ f\neq f\circ g$.
Par exemple, on a : $(f+g)^2=f^2+f\circ g+g\circ f+g^2\neq f^2+2.f\circ g+g^2$.

1.2.4 Bijection réciproque

Théorème 13 – Bijection réciproque d'un iso/automorphisme

1. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$.
2. Si f est un automorphisme de $\mathbb{E}$, alors f^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Définition 14 – Puissances négatives d'un automorphisme

Soit f un automorphisme de $\mathbb{E}$. On pose :
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{(f^{-1}) \circ (f^{-1}) \circ \cdots \circ (f^{-1})}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 15 – Règles de calcul

Si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $(f^n)^p = f^{np} = (f^p)^n$ et $f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n$ et $(f^{-1})^n = f^{-n} = (f^n)^{-1}$.

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 16 – Image directe d'un sous-espace vectoriel

Si f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ et si $\mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ alors $f(\mathbb{G})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$.

Si $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$, alors $f^{-1}(\mathbb{H})$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Définition 17 – Noyau et image

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle noyau de f la partie de $\mathbb{E}$ suivante :
$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{x \in \mathbb{E};\ f(x) = 0_{\mathbb{F}}\}$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle image de f la partie de $\mathbb{F}$ suivante :
$$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{E}) = \{f(x) \in \mathbb{F};\ x \in \mathbb{E}\}$$

On a donc pour $x \in \mathbb{E}$:

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_{\mathbb{F}}$$

Et pour $y \in \mathbb{F}$:

$$y \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists x \in \mathbb{E};\ y = f(x)$$

Théorème 18 – $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{K}$-ev

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$.

Si f est un endomporhisme de $\mathbb{E}$ alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathbb{E} = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K});\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathbb{E} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}};\ f(0) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\mathbb{E} = \{P \in \mathbb{K}[X];\ 3XP' = P\}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

✎ ***Exemple.*** On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u = (x, y, z) & \longmapsto & f(u) = f(x, y, z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$

Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Proposition 19 – Interprétation de la non intégrité de la composition

Si f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ alors :

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})} \iff \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$$

⚠ En particulier $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ne donne pas $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ou $g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Prendre par exemple $f(x, y) = (x, x)$ et $g(x, y) = (x - y, x - y)$.

⚠ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$ ne donne pas que $f = g$. Prendre par exemple $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = x + y$.

Théorème 20 – Critères d'injectivité et de surjectivité

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors :

1. f est injective sur $\mathbb{E} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est surjective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F} \iff \mathrm{Im}(f) = \mathbb{F}$.

Le premier point n'est vrai que si f est linéaire. Par contre le second est vrai en général, quelle que soit l'application (il ne sera donc pas très utile en pratique).

✎ ***Exemple.*** Montrer qu'une forme linéaire sur $\mathbb{E}$ est soit nulle soit surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{K}$.

Cas d'une restriction : Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$, on a $\operatorname{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \operatorname{Ker}(f) \cap \mathbb{H}$. Donc si f est injective, $f_{|\mathbb{H}}$ l'est encore. On a aussi $\operatorname{Im}(f_{|\mathbb{H}}) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, mais dans le cas général, on ne peut rien dire de plus.

1.4 Structure de l'ensemble de solutions d'une équation linéaire

Soit f une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ et v un vecteur fixé de $\mathbb{F}$. On s'intéresse à l'équation $f(u) = v$ d'inconnue $u \in \mathbb{E}$.

Théorème 21 – Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

1. Si $v \in \operatorname{Im}(f)$, on suppose qu'on connaît $u_0 \in \mathbb{E}$ tel que $f(u_0) = v$.
   L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = v$ est :
   $$\mathscr{S} = \{u_0 + x;\ x \in \operatorname{Ker}(f)\}$$
2. Si $v \notin \operatorname{Im}(f)$ alors l'équation $f(u) = v$ n'a pas de solution.

On le note ainsi : $\mathscr{S} = u_0 + \operatorname{Ker}(f)$.

On retrouve le résultat vu dans le chapitre sur les équations différentielles linéaires : une solution générale de l'équation complète est la somme d'une solution particulière et d'une solution générale de l'équation homogène.

1.5 Applications linéaires et sommes directes

Dans cette section, on suppose que $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$ sont deux sous-epsaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{E}$: $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$.

Théorème 22 – Applications linéaires et sev supplémentaires

Une application linéaire $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ est entièrement déterminée par ses restrictions $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$.

Si on se donne $u : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $v : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{F}$ deux applications linaéaires, alors f est définie ainsi : si $x = x_G + x_H$ dans $\mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$ alors $f(x) = u(x_G) + v(x_H)$.

Dans la suite lorsqu'on écrit $x = x_G + x_H$, on supposera qu'on a décomposé $x \in \mathbb{E}$ dans la somme directe $\mathbb{G} + \mathbb{H}$.

Définition 23 – Projection

L'application :
$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ x = x_G + x_H & \longmapsto & p(x) = x_G \end{array}$$
est appelée *projection sur* $\mathbb{G}$ *parallèlement à* $\mathbb{H}$.

La projection p peut être aussi définie par ses restrictions à $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$: sur $\mathbb{G}$ c'est l'identité de $\mathbb{G}$ et sur $\mathbb{H}$ c'est l'application nulle.

De même l'application :

$$q: \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ x = x_G + x_H & \longmapsto & q(x) = x_H \end{array}$$

est appelée *projection sur* $\mathbb{H}$ *parallèlement à* $\mathbb{G}$.

p et q sont appelés *projections associées* à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$.

Important. Lorsqu'on montre que $\mathbb{E} = \mathbb{G} \oplus \mathbb{H}$ par analyse-synthèse, les formules obtenues dans la partie analyse donnent une expression de $p(x)$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer l'expression de la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 24 – Propriétés des projections

1. p et q sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$
2. $p + q = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$
3. $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$;
4. Pour $x \in \mathbb{E}$: $x \in \mathrm{Ker}(p) \iff p(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Im}(p) \iff p(x) = x$;
5. $\mathbb{H} = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Im}(p) =$ ensemble des points fixes de p
6. $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$

On a donc aussi $\mathbb{H} = \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - p)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - p)$.

⚠ On a $\mathbb{H} = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - p) = \mathrm{Im}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ mais $p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ n'est pas un projecteur (en général). C'est $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} - p$ qui en est un.

⚠ Si p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{E}$, on n'a pas en général $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. C'est vrai si p et q sont deux projecteurs **associés**, ie si $p + q = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Définition 25 – Projecteurs

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit que f est un *projecteur* lorsque $f \circ f = f$.

Théorème 26 – Caractérisation des projections

Soit p un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors p est une projection si et seulement si p est un projecteur, ie $p \circ p = p$.
On a alors $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

On a donc égalité entre les notions de projections et de projecteurs.

✎ ***Exemple.*** Calculer $(\mathrm{id}_{\mathbb{E}} + p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque p est un projecteur de $\mathbb{E}$.

⚠ Si f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, qui n'est pas un projecteur, alors on ne peut pas dire que $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Remarque. Noter que $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ sont les deux projecteurs associés de $\mathbb{E}$ associés à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \{0_{\mathbb{E}}\}$.

Définition 27 – Symétries

L'application :

$$s : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ x = x_G + x_H & \longmapsto & s(x) = x_G - x_H \end{array}$$

est appelée *symétrie par rapport à* $\mathbb{G}$ *parallèlement à* $\mathbb{H}$.

Avec les notations précédentes, on a : $s = p - q = 2p - \mathrm{id}_{\mathbb{E}} = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} - 2q$.

La symétrie s par rapport à $\mathbb{G}$ parallèlement à $\mathbb{H}$ peut être aussi définie par ses restrictions à $\mathbb{G}$ et $\mathbb{H}$: sur $\mathbb{G}$ c'est $\mathrm{id}_{\mathbb{G}}$ et sur $\mathbb{H}$ c'est $-\mathrm{id}_{\mathbb{H}}$.

On peut définir de même la *symétrie par rapport à* $\mathbb{H}$ *parallèlement à* $\mathbb{G}$

Proposition 28 – Propriétés des symétries

1. s est un endomorphisme de $\mathbb{E}$;
2. $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ donc s est un automorphisme de $\mathbb{E}$ et $s^{-1} = s$
3. $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) =$ ensemble des points fixes de s
4. $\mathbb{G} = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) =$ ensemble des anti-points fixes de s

Théorème 29 – Caractérisation des symétries

Soit s un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.
On a alors $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_{\mathbb{E}})$.

✎ ***Exemple.*** En considérant la transposition montrer que dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les sous-espaces $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires.

✎ ***Exemple.*** En considérant la symétrie $s : f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longmapsto s(f) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par $s(f)(x) = f(-x)$, montrer que, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les sous-espaces des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

Remarque. Noter que $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ est une symétrie $\mathbb{E}$ associés à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{E} \oplus \left\{\overrightarrow{0}_{\mathbb{E}}\right\}$ (mais $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ n'en est pas une).

2 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce paragraphe, sauf mention contraire, on suppose que les K-espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont tous les deux de dimension finie.

2.1 Image d'une famille de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ une base quelconque de $\mathbb{E}$.

Théorème 30 – Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base

Si $(v_1,\dots,v_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ telle que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(\varepsilon_k) = v_k$.

Elle est définie ainsi : si $x \in \mathbb{E}$ a pour coordonnées s'écrit $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\varepsilon_k$ dans $\mathscr{B}$, alors

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k.v_k$$

Pour définir $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, il suffit donc de se donner l'image d'une base, c'est-à-dire la valeur des vecteurs $f(\varepsilon_1)$, ..., $f(\varepsilon_p)$.

Corollaire 31 – Égalité de deux applications linéaires

Si f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ et si $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(\varepsilon_k) = g(\varepsilon_k)$ alors $f \equiv g$.

On dit que deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

✎ ***Exemple.*** Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\varphi : P \in \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. Montrer que φ et $\mathrm{id}_{K_n[X]}$ coïncident sur la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelle formule vient-on de redémontrer ?

Théorème 32 – Image d'une famille de vecteurs

Soient $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. On a : $f\big(\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(u_1),\dots,f(u_p)\big)$
2. En particulier si $(u_1,\dots,u_p)$ est génératrice (ou est une base) de $\mathbb{E}$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(u_1),\dots,f(u_p)\big)$$

Ce théorème permet de déterminer facilement l'image d'une application linéaire.

✎ ***Exemple.*** : Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$ lorsque :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u=(x,y,z) & \longmapsto & f(u)=f(x,y,z)=(2x-z,x+y+z) \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application linéaire

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & f(P)=P' \end{array}$$

Montrer qu'elle est surjective de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans les théorèmes suivants f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Théorème 33 – Applications linéaires et familles libres

1. Si f est injective sur $\mathbb{E}$, alors elle transforme toute famille libre de $\mathbb{E}$ en une famille libre de $\mathbb{F}$.
2. On a équivalence de :
   (i) f est injective sur $\mathbb{E}$
   (ii) il existe une base de $\mathbb{E}$ qui est transformée par f en une famille libre de $\mathbb{F}$
   C'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

Théorème 34 – Applications linéaires et familles génératrices

1. Si f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, alors elle transforme toute famille génératrice de $\mathbb{E}$ en une famille génératrice de $\mathbb{F}$.
2. On a équivalence de :
   (i) f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$
   (ii) il existe une base de $\mathbb{E}$ qui est transformée par f en une famille génératrice de $\mathbb{F}$
   C'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

Corollaire 35 – Isomorphismes et bases

On a équivalence de :

(i) f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$

(ii) il existe une base de $\mathbb{E}$ qui est transformée par f en une base de $\mathbb{F}$

C'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

Donc un isomorphisme est une application linéaire qui tranforme une famille libre en une famille libre, une famille génératrice en une famille génératrice, et une base en une base; cette dernière condition étant caractéristique des isomorphismes.

En combinant avec le fait qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base on obtient le résultat suivant.

Corollaire 36 – Définition géométrique d'un isomorphisme

Si on se donne une base $\mathscr{B}$ quelconque de $\mathbb{E}$ et une base $\mathscr{C}$ quelconque de $\mathbb{F}$, alors il existe un unique isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ qui transforme $\mathscr{B}$ en $\mathscr{C}$.

On a aussi démontré le théorème suivant, qui n'est pas sans rappeler le « principe des tiroirs » en dénombrement.

Théorème 37 – Applications linéaires en dimension finie

Soit f linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

1. Si f est injective sur $\mathbb{E}$, alors $\dim(\mathbb{E}) \leq \dim(\mathbb{F})$.
2. Si f est surjective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, alors $\dim(\mathbb{E}) \geq \dim(\mathbb{F})$.
3. (a) Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, alors $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.
   (b) Si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$ alors :

$$f \text{ est bijective } \iff f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective}$$

⚠ Ce résultat est faux en dimension infinie. Considérer par exemple l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** L'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - 2XP' \end{array}$$

est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

Corollaire 38 – Endomorphisme bijectif en dimension finie

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inversible pour la loi de composition si, et seulement si, il est inversible à gauche ou inversible à droite.

⚠ Ceci n'est vrai qu'en dimension finie ! Considérer comme contre-exemple le morphisme « shift » sur les suites réelles :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Dans la définition suivante, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ ne sont pas supposés de dimension finie.

Définition 39 – Espaces vectoriels isomorphes

On dit que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont *isomorphes* lorsqu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$, et si on identifie $x \in \mathbb{E}$ avec son image $f(x)$, alors les espaces vectoriels $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont en un certain sens « égaux ».

On suppose à nouveau que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont tous les deux de dimension finie.

Théorème 40 – Espaces vectoriels isomorphes et de dimension finie

On a équivalence de :

(i) $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont isomorphes

(ii) $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est un base fixée de $\mathbb{E}$ on peut lui associer *l'isomorphisme canonique*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k . \varepsilon_k & \longrightarrow & \varphi(x) = (x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** Retrouver les résultats de début d'année sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

✎ ***Exemple.*** Retrouver les résultats de début d'année sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

2.2 Rang d'une application linéaire

Dans ce paragraphe, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension quelconque et f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$.

Définition 41 – Rang d'une application linéaire

Si $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, alors on dit que f est de *rang fini*. Dans le cas contraire, on dit que f est de *rang infini*.
Si f est de rang fini, alors on appelle *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Pour une application linéaire de rang fini, on a donc : $\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

✎ ***Exemple.*** $\mathrm{rg}(f) = 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}$

Théorème 42 – Propriétés du rang d'une application linéaire

1. Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors $\operatorname{rg}(f)$ est de rang fini :
$$\operatorname{rg}(f) \leq \dim(\mathbb{E})$$
avec égalité si, et seulement si, f est injective.
2. Si $\mathbb{F}$ est de dimension finie, alors $\operatorname{rg}(f)$ est de rang fini :
$$\operatorname{rg}(f) \leq \dim(\mathbb{F})$$
avec égalité si, et seulement si, f est surjective.

En général on a donc $\operatorname{rg}(f) \leq \min(\dim(\mathbb{E}), \dim(\mathbb{F}))$.

Noter que si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, et si $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ est une base de $\mathbb{E}$, alors :

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\big(f(u_1), \ldots, f(u_p)\big)$$

au sens du rang d'une famille de vecteurs, notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Corollaire 43 – Rang et isomorphisme

Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont de même dimension finie n alors :

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ vers } \mathbb{F} \iff \operatorname{rg}(f) = n$$

Le théorème suivant est fondamental, puisqu'il relie la dimension du noyau à celle de l'image.

Théorème 44 – Théorème du rang

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors f est de rang fini et :

$$\dim(\mathbb{E}) = \operatorname{rg}(f) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$$

⚠ Dans le cas $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, cela ne signifie pas que $\mathbb{E} = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$: il manque la condition $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\}$.

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 45 – Isomorphisme entre les supplémentaires du noyau et l'image

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathbb{H}$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(f)$.

Terminons par un résultat qui sera utile pour calculer le rang de manière algorithmique.

$\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$.

Théorème 46 – Rang d'une composée - Invariance du rang par isomorphisme

1. Rang d'une composée. $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$
2. Invariance du rang par isomorphisme.
   Si g est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f)$
   Si f est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(g)$

✎ ***Exemple.*** En utilisant le théorème du rang avec l'application linéaire $g_{|\mathrm{Im}\, f}$, montrer que :

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim\left(\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f\right)$$

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire.

- ✪ Pour un endomorphisme, ne pas oublier de vérifier que l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont égaux.
- ✪ Ne pas confondre les notions *d'endomorphisme*, *d'isomorphisme* et *d'automorphisme*.

➥ Effectuer des calculs algébriques avec des applications linéaires.

- ✪ Dans les calculs voir l'opération de composition $\circ$ comme un « produit ».

➥ Connaître les notions de noyau et d'image d'une application linéaire.

- ✪ Savoir déterminer une base du noyau en utilisant une résolution d'équation.
- ✪ Savoir déterminer une base de l'image en utilisant qu'elle est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ.
- ✪ Connaître le lien entre noyau/image et injectivité/surjectivité.

➥ Connaître la notion de projections p et q associées à une somme directe.

- ✪ Connaître la caractérisation $p \circ p = p$.
- ✪ Savoir déterminer leur noyau et leur image.
- ✪

➥ Connaître la notion de symétries s associé à une somme directe.

- ✪ Connaître la caractérisation $s \circ s = \mathrm{id}$.
- ✪ Savoir déterminer son noyau et son image.
- ✪

➥ Savoir qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base.

- ✪ Savoir que les isomorphismes sont les applications linéaires qui envoient une base sur une base.
- ✪ Savoir que si les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension finie, alors les isomorphismes coïncident avec les applications linéaires injectives ou surjectives, ou encore avec les applications linéaires inversibles à gauches ou à droite.
- ✪ Savoir qu'en dimension finie les automorphismes coïncident avec les endomorphismes injectifs ou surjectifs, ou encore avec les endomorphismes inversibles à gauche ou à droite.

➥ Connaître les propriétés théoriques du rang d'une application linéaire.

4 Exercices

Exemples d'applications linéaires

EXERCICE 1. Dérivation dans $\mathbb{R}[X]$

Soient $f, g : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ les applications définies par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \qquad f(P) = P' \text{ et } g(P) = XP$$

1. Montrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer $f \circ g - g \circ f$.

EXERCICE 2. Exemples d'applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x^2 + z, y + z, z + 1)$. f est-elle linéaire ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(x, y, z, t) = (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$. Montrer que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

EXERCICE 3. Endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Vérifier que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer leur noyau et leur image :

1. $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$
2. $$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \psi(u) = (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

EXERCICE 4. Endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image :

1. $$\begin{array}{rccl} \psi : & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ & f & \longmapsto & \psi(f) = g \end{array}$$
   où $g(x) = f(x) + f(-x)$.
2. $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(1) \end{array}$$

EXERCICE 5. Endomorphisme de $C^0([0,1],\mathbb{R})$

On φ l'application qui à une fonction f continue sur $[0,1]$ associe la fonction g définie par : $\forall x \in [0,1],\ g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. Est-il injectif? Surjectif?

EXERCICE 6. Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2-1)P'' + XP' - 4P \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$. Déterminer $\deg(\varphi(P))$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

EXERCICE 7. Dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'application

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son application réciproque.

EXERCICE 8. Utilisation d'un polynôme annulateur pour un endomorphisme

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{E}} = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et donner f^{-1} en fonction de f.
2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de scalaires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^n = a_n \mathrm{id}_{\mathbb{E}} + b_n f$. En déduire f^n en fonction de n.
3. Montrer par analyse-synthèse que $\mathbb{E} = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{E}}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$.

EXERCICE 9. Structure d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$

Soient $\mathbb{E},\mathbb{F},\mathbb{E}',\mathbb{F}'$ des $\mathbb{K}$-ev, φ un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}'$, et ψ un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{F}'$. Montrer que l'application :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{E}',\mathbb{F}') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Noyau, image et rang

EXERCICE 10. Propriétés des noyaux et des images

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$, $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ et que $\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = f\big(\text{Ker}(g \circ f)\big)$.
2. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$ sont stables par f.

EXERCICE 11. Rang d'un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}^3$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \neq \text{Ker}(f^2)$.
2. En déduire que $\text{Ker}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f^2) = \text{Ker}(f)$.
3. Conclure que $\text{rg}(f) = 2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$.

EXERCICE 12. Une propriété du rang

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev tels que $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

1. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Montrer que :

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leqslant \text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

2. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f + g$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim \mathbb{E}$.

EXERCICE 13. CNS pour que $\mathbb{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

1. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. Établir que :

$$\mathbb{E} = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \text{ et } \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

2. Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. Établir que :

$$\mathbb{E} = \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$$

et :

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{E}}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$$

Conclure.

Projections et symétries

EXERCICE 14. Projections et symétries définie géométriquement

Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On considère les sev de $\mathbb{E}$ suivant : $\mathbb{F} = \text{Vect}((1,0,0)_{\mathscr{B}}, (1,1,1)_{\mathscr{B}})$ et $\mathbb{G} = \text{Vect}((1,2,0)_{\mathscr{B}})$.
Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$, et déterminer l'expression analytique du projecteur sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$, et de la symétrie par rapport à $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.

EXERCICE 15. Projection définie analytiquement

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$. Montrer que f est un projecteur et préciser son support et sa direction.

EXERCICE 16. Projections dans la même direction

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que p et q ont même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que p et q projettent selon la même direction.

EXERCICE 17. Somme de deux projections

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
2. Dans ce cas, vérifier que : $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$ et $\text{Im}(p + q) = \text{Im}\, p \oplus \text{Im}\, q$.

Cas de la dimension finie

EXERCICE 18. Un isomorphisme

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1))$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

EXERCICE 19. Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $\theta(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que θ est un endomorphisme et déterminer une base de son noyau et de son image.

EXERCICE 20. Polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels 2 à 2 distincts. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \varphi(P) = (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. En déduire que si $y_0, \dots, y_n$ sont des réels donnés alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad P(x_i) = y_i$$

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on note L_j l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

   Vérifier que $\mathscr{B} = (L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans cette base ?

EXERCICE 21. Surjectivité en dimension finie

Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et que si P est un polynôme non constant alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\ker(\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[X]})$ et en déduire que Δ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$.
3. En déduire que Δ est surjective de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]$.

EXERCICE 22. Une propriété des endomorphismes nilpotents

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que f est *nilpotent d'ordre p* : c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{E} \backslash \{0_{\mathbb{E}}\}$ est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{E}}$, alors la famille $\mathscr{F} = \left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.
2. Si $n = \dim(\mathbb{E}) < +\infty$, en déduire que $p \leq n$.