<u>dem th 22</u> Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

* Comme $X(\Omega) = \{0;1\}$ on a

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = 0 \times q + 1 \times p = \boxed{p}$$

* Comme $X(\Omega) = \{0;1\}$ le th de transfert nous donne :

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p$$

D'après la formule de Kœnig-Huyghens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = \boxed{p \times (1-p)} = p \times q$$

Example 3 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une VAR telle que

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p).$$

On pose $Y = X^2$.

Alors $Y(\Omega) = \{0^2 ; 1^2\} = \{0 ; 1\}$

Donc Y suit une loi de Bernoulli de paramètre noté a.

On a : $a = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X^2 = 1)$

or $(X^2 = 1) = (X = 1) \uplus (X = -1) = (X = 1)$

Donc $a = \mathbb{P}(X = 1) = p$

Ainsi $X^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

Exemple 4 Soit A un événement (ie une partie de Ω) tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$.

On note $X = \mathbb{1}_A$

donc
$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto X(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases}$$

On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre noté p.

On a $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Or
$$(X = 1) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = 1\}$$
$$= \{\omega \in \Omega,\ \omega \in A\} = A$$

Donc $p = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A)$

Donc X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

En particulier: $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$