dem th 4 $\quad X : \Omega \longrightarrow E$

alors $X(\Omega)$ est une partie de E.

On définit $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0,1]$

$$A \longmapsto \mathbb{P}_X(A) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X \in A)$$

Montrons que $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur l'univers $X(\Omega)$.

* Vérifions que $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = 1$

Par def: $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega))$

or $(X \in X(\Omega)) = \{\omega \in \Omega ;\ \underbrace{X(\omega) \in X(\Omega)}_{\text{toujours vrai}}\}$

$= \Omega$

Donc $\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ car $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des parties de $X(\Omega)$ supposées 2 à 2 incompatibles.

Vérifions que $\mathbb{P}_X\left(\hat{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_X(A_k)$

On a $\mathbb{P}_X\left(\hat{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left(X \in \hat{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right)$

Or $\left(X \in \hat{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right) \overset{\text{def}}{=} X^{-1}\left(\hat{\bigcup}_{k=1}^{n} A_k\right) = \hat{\bigcup}_{k=1}^{n} X^{-1}(A_k)$

d'après la prop 53 du chap 1

Donc $\left(X \in \biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} (X \in A_k)$

D'autre part si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$:

$$
\begin{aligned}
(X \in A_i) \cap (X \in A_j) &= X^{-1}(A_i) \cap X^{-1}(A_j) \\
&= X^{-1}(A_i \cap A_j) \quad \text{[prop S3 chap 1]} \\
&= X^{-1}(\emptyset) = \emptyset
\end{aligned}
$$

car $A_i \cap A_j = \emptyset$

Donc les évènements $(X \in A_k)$, pour $k \in [\![1,n]\!]$, sont deux à deux incompatibles.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}_X\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\biguplus_{k=1}^{n} (X \in A_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \in A_k) \quad \text{car } \mathbb{P} \text{ est une probabilité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_X(A_k)
\end{aligned}
$$

Ceci prouve que $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$

$$
\underset{\substack{\text{probabilité} \\ \mathbb{P}}}{\Omega} \xrightarrow{X} \underset{\substack{\text{probabilité} \\ \mathbb{P}_X}}{X(\Omega)} \subseteq E
$$