Exemple 1 On lance deux dés distinguables.

$\Omega = [\![1, 6]\!]^2$

$X =$ "somme des deux chiffres obtenus"

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

On voit facilement que $X(\Omega) = [\![2, 12]\!]$

On doit calculer $\mathbb{P}(X=k)$ pour chaque $k \in [\![2, 12]\!]$.

On procède ici au cas par cas (il y en a 11).

* $(X=2) =$ "la somme des chiffres obtenus est 2"

$=$ "les dés ont donné $(1,1)$"

$= \{(1,1)\}$

donc $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$

* De même $(X=3) = \{(1,2) ; (2,1)\}$

donc $\mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{36}$

* $(X=4) = \{(1,3) ; (2,2) ; (3,1)\}$

donc $\mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{36}$ Etc...

Exemple 2 On pose $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $p_k = \binom{n}{k-1} \frac{1}{2^n}$

$x_k = k - 1$

On a * $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $p_k \geq 0$

et * $\sum_{k=1}^{n+1} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

$= \frac{1}{2^n} \times 2^n = 1$

Donc il existe une VAR X telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$

et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = x_{k+1}) = p_{k+1}$

ie $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

$\boxed{\text{Cas particulier où } X \text{ est à valeurs entières}}$

$$X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}.$$

Comme $X(\Omega)$ est fini : $\exists n \in \mathbb{N},\ X(\Omega) \subseteq [\![0,n]\!]$.

$\boxed{\text{① Si on connaît les } \mathbb{P}(X \leq k),\ k \in [\![0,n]\!], \text{ alors on connaît les } \mathbb{P}(X=k),\ k \in [\![0,n]\!] \text{ (ie la loi de } X).}$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X(\omega) \leq k \underset{\text{car } X \text{ à valeurs entières}}{\iff} X(\omega) \leq k-1 \text{ ou } X(\omega) = k$$

Donc : $\omega \in (X \leq k) \iff \omega \in (X \leq k-1) \uplus (X=k)$

Donc : $(X \leq k) = (X \leq k-1) \uplus (X = k)$

Par additivité de $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k-1) + \mathbb{P}(X=k)$

Finalement : $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)}$

② Si on connaît les $\mathbb{P}(X \geqslant k)$, $k \in [\![0,n]\!]$, alors on connaît les $\mathbb{P}(X=k)$, $k \in [\![0,n]\!]$ (ie la loi de X)

Si $k \in [\![0,n]\!]$: $\quad (X \geqslant k) = (X=k) \uplus (X \geqslant k+1)$

Donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \mathbb{P}(X=k) + \mathbb{P}(X \geqslant k+1)$

donc $\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)}$

③ Si on connaît les $\mathbb{P}(X=k)$, $k \in [\![0,n]\!]$, (ie la loi de X) alors on connaît les $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, $k \in [\![0,n]\!]$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$X(\omega) \leqslant k \iff X(\omega) = 0 \text{ ou } X(\omega) = 1 \text{ ou } \dots \text{ ou } X(\omega) = k$$

donc $\omega \in (X \leqslant k) \iff \omega \in \biguplus_{j=0}^{k} (X=j)$

Donc : $(X \leqslant k) = \biguplus_{j=0}^{k} (X=j)$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)}$$

$\boxed{\text{④ Si on connaît les } \mathbb{P}(X=k),\ k\in[\![0,n]\!],\ (\text{ie la loi de } X) \text{ alors on connaît les } \mathbb{P}(X\geqslant k),\ k\in[\![0,n]\!].}$

Si $k\in[\![0,n]\!]$: $(X\geqslant k)=\overset{n}{\underset{j=k}{\dot\bigcup}}(X=j)$

Donc $\boxed{\forall k\in[\![0,n]\!],\ \mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(X=j)}$