Th 9 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur $\mathcal{D}f$
et X V.A.R. à valeurs dans $\mathcal{D}f$: $X(\Omega) \subseteq \mathcal{D}f$.

Alors $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x).$$

Donc si on note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Cas particulier où X est à valeurs entières :
$\exists n \in \mathbb{N},\ X(\Omega) \subseteq [\![0, n]\!]$.

Alors $$\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=0}^{n} f(k) \times \mathbb{P}(X = k)}$$

Et donc : $$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \mathbb{P}(X = k)}$$

<u>Cor 10</u> Soit X une V.A.R.

et a, b constantes réelles.

Alors $\boxed{\mathbb{E}(aX+b) = a.\mathbb{E}(X) + b}$

<u>Cas particuliers</u>

* $a = 0$ donne $\boxed{\mathbb{E}(b) = b}$

  ie la moyenne d'une V.A.R. constante est égale à cette même constante.

* si $a = 0$ et $b = \mathbb{E}(X)$ on a donc :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)}$$

* ensuite si $a = -1$ et $b = 0$

$$\boxed{\mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X)}$$

* finalement si $a = 1$ et $b = -\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0}$

<u>dem cor 10</u> On se donne X V.A.R. et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

On définit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$.

On note aussi $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Alors par déf : $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \mathbb{P}(X=x_k)$

Et d'après le th de transfert :

$$\mathbb{E}(f(X))=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\times\mathbb{P}(X=x_k)$$

donc ici :

$$\mathbb{E}(aX+b)=\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)\times\mathbb{P}(X=x_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(ax_k\times\mathbb{P}(X=x_k)+b\times\mathbb{P}(X=x_k)\right)$$ en développant le t.g. de la somme

$$=a\underbrace{\sum_{k=1}^{n}x_k\times\mathbb{P}(X=x_k)}_{=\mathbb{E}(X)}+b\times\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_k)}_{=1}$$ par linéarité de Σ

car $X(\Omega)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$

ie $\boxed{\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b}$

dem cor 1.2

1. On suppose $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$.

On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et on a donc

$\forall k \in [\![1, n]\!], \ x_k \geq 0$.

Par déf : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{x_k}_{\geq 0} \times \mathbb{P}\underbrace{(X = x_k)}_{\geq 0} \geq 0$

2. On pose $Z = Y - X$

Alors Z est à valeurs positives donc d'après le 1.

on a $\mathbb{E}(Z) \geq 0$

Et d'après le th 11 : $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)$

Donc $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.