$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_f \subseteq E \arrow[r, "f"] & F \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "Y = f\circ X"'] & \end{tikzcd}$$

Y est définie sur Ω car $X(\Omega) \subseteq \mathcal{D}_f$

ie X est à valeurs dans $\mathcal{D}_f$.

Y est une <u>variable aléatoire à valeurs dans</u> F.

<u>Notations</u> : $Y = f\circ X$ est notée $Y = f(X)$

Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors

$Y(\Omega) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ qu'on peut simplifier en

$Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \dots < y_p$

(si $F = \mathbb{R}$)

dem th 7 Soit $y \in Y(\Omega)$ (y une valeur prise par Y)

Alors pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\omega \in (Y=y) &\iff Y(\omega) = y \\ &\iff f(X(\omega)) = y \\ &\iff X(\omega) \text{ est un antécédent de } y \text{ par } f \\ &\iff \omega \in \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} (X = x)\end{aligned}$$

Donc $(Y=y) = \biguplus_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} (X = x)$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple

k	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

On pose $Y \overset{\text{def}}{=} X^2$.

Comme $X(\Omega) = \{-2; 1; 0; 1; 2\}$ on a

$$Y(\Omega) = \{0; 1; 4\}$$

De plus $(Y=0) = (X=0)$ donc $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{10}$

$(Y=1) = (X=-1) \uplus (X=1)$

donc $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) = \frac{3}{10}$

$(Y=4) = (X=-2) \uplus (X=2)$

donc $\mathbb{P}(Y=4) = \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=2) = \frac{3}{5}$

k	0	1	4
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$