dem th 14 :

1. On a $\forall \omega \in \Omega, \left(X(\omega) - \mathbb{E}(X)\right)^2 \geq 0$

ie $\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2$ est une V.A.R. positive.

Par positivité de l'espérance : $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right] \geq 0$

ie $\boxed{V(X) \geq 0}$

2. On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose : $m = \mathbb{E}(X)$

Par déf : $V(X) = \mathbb{E}\left[(X - m)^2\right]$

On applique le th de transfert avec $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x - m)^2 \end{array}$

et on obtient :

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - m)^2 \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

C'est une somme de termes positifs. Elle est donc nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls.

Donc :

$$V(X)=0 \iff \forall k\in[\![1,n]\!],\quad (x_k-m)^2\times \mathbb{P}(X=x_k)=0$$
$$\iff \forall k\in[\![1,n]\!],\quad x_k=m \text{ ou } \mathbb{P}(X=x_k)=0$$
$$\iff \mathbb{P}(X=m)=1$$
$$\iff X \text{ ne prend que la valeur } m.$$
$$\iff \forall \omega\in\Omega,\quad X(\omega)=m$$
$$\iff X \text{ est constante}$$

$x_k=m$ ne peut se produire
que pour un seul entier k_0
et alors pour $k\neq k_0$ on a $\mathbb{P}(X=x_k)=0$
Comme $\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_k)=1$ on a donc $\mathbb{P}(X=x_{k_0})=1$

3. On pose $Y=aX+b$.
Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(Y)=a\,\mathbb{E}(X)+b$.

Donc $Y-\mathbb{E}(Y)=a(X-\mathbb{E}(X))$
donc $(Y-\mathbb{E}(Y))^2=a^2\times(X-\mathbb{E}(X))^2$

On passe à l'espérance :

linéarité de $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}(Y))^2\right]=\mathbb{E}\left[a^2\times(X-\mathbb{E}(X))^2\right]=a^2\times\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right]$$

donc $V(Y) = a^2 \times V(X)$

ie $V(aX+b) = a^2 \times V(X)$

<u>th 15</u> si X est une V.A.R. on a :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

<u>En pratique</u> si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ on a

$$m = \mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k) \quad \text{par déf}$$

$$\mu = \mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \times \mathbb{P}(X = x_k) \quad \text{d'après le th de transfert.}$$

puis $V(X) = \mu - m^2$ d'après la formule de Koenig-Huyghens

<u>Cas particulier</u> si X est à valeurs entières :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad X(\Omega) \subset [\![0, n]\!].$$

Alors $m \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}(X=k)$

$$\mu \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}(X^2) \overset{\text{th}}{=} \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$V(X) \overset{\text{th}}{=} \mu - m^2$$

dem th 15 On note encore $m = \mathbb{E}(X)$.

Par def : $V(X) = \mathbb{E}\left[(X-m)^2\right]$

Mais $\forall \omega \in \Omega$, $(X(\omega)-m)^2 = X(\omega)^2 - 2m X(\omega) + m^2$

donc par linéarité de l'espérance :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2m . \mathbb{E}(X) + m^2$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2m^2 + m^2 = \mathbb{E}(X^2) - m^2$$

Donc $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$