dem prop 33 On suppose $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose f antisymétrique.

but f est alternée.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$. On se donne $C_1, \dots, C_n$ matrices colonnes telles que $C_i = C_j$.

On a donc :

$$f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

et comme f est antisymétrique :

$$f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$$

Donc $f(C_1, \dots, C_n) = 0$

Ceci prouve que f est alternée.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que f est alternée.

but f est antisymétrique.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$. On se donne $C_1, \dots, C_n$ matrices colonnes quelconques.

Comme $C_i + C_j = C_i + C_j$ et comme f est alternée :

$$f(C_1, \dots, C_i + C_j, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n) = 0$$

Comme f est multilinéaire :

$$f(c_1,\dots,c_i,\dots,c_i+c_j,\dots,c_n)+f(c_1,\dots,c_j,\dots,c_i+c_j,\dots,c_n)=0$$

donc :

$$\underbrace{f(c_1,\dots,c_i,\dots,c_i,\dots,c_n)}_{=0 \text{ car } f \text{ alternée}}+f(c_1,\dots,c_i,\dots,c_j,\dots,c_n)$$

$$+f(c_1,\dots,c_j,\dots,c_i,\dots,c_n)+\underbrace{f(c_1,\dots,c_j,\dots,c_j,\dots,c_n)}_{\substack{=0\\ \text{car } f \text{ est alternée}}}=0$$

donc :

$$f(c_1,\dots,c_i,\dots,c_j,\dots,c_n)=-f(c_1,\dots,c_j,\dots,c_i,\dots,c_n)$$

Ceci prouve que f est antisymétrique.

Par double-implication l'équivalence est démontrée.

dem th 34

$\boxed{\text{Cas } n=2}$ On raisonne par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u> Soit $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ multilinéaire antisymétrique et telle que $f(I_2) = 1$.

On pose $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ notée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

La première colonne de A est $aE_1 + cE_2$ et la seconde colonne de A est $bE_1 + dE_2$.

Donc
$$\begin{aligned} f(A) &= f(aE_1 + cE_2, bE_1 + dE_2) \\ &= a.f(E_1, bE_1 + dE_2) + c.f(E_2, bE_1 + dE_2) \\ &= ab.f(E_1, E_1) + ad.f(E_1, E_2) + bc.f(E_2, E_1) \\ &\quad + cd.f(E_2, E_2) \end{aligned}$$

Comme f est multilinéaire et antisymétrique elle est aussi alternée. Donc $f(E_1, E_1) = f(E_2, E_2) = 0$

De plus $f(E_1, E_2) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(I_2) = 1$

Comme f est antisymétrique :

$$f(E_2, E_1) = -f(E_1, E_2) = -1$$

Finalement : $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

Donc si f existe alors elle est unique.

Synthèse On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto ad - bc \end{aligned}$$

est multilinéaire antisymétrique et que $f(I_2) = 1$.

Donc f existe.

$\boxed{\text{Cas général } n \in \mathbb{N} \text{ et } n \geq 2}$ Admis en PCSI.