<u>dem cor 7</u> : Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$.

<u>1.</u> $\boxed{\Longrightarrow}$ Evident.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$.

<u>but</u> $A = B$

* <u>Version représentations matricielles</u>

On note f et g les applications linéaires canoniquement associées à A et B.

Donc si $\mathcal{B}_{cano} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et si $\mathcal{E}_{cano} = (\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ alors $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire et $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano})$

et $g : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire et $B = \mathrm{Mat}(g ; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano})$.

Soit $\vec{x} \in \mathbb{K}^p$ fixé qcq.

On note $X = \mathrm{Mat}(\vec{x} ; \mathcal{B}_{cano}) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

On a supposé que $AX = BX$.

D'après le th 6 : $\mathrm{Mat}(f(\vec{x}), \mathcal{E}_{cano}) = \mathrm{Mat}(g(\vec{x}) ; \mathcal{E}_{cano})$

Par unicité des représentations matricielles : $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$.

C'est vrai pour tout $\vec{x} \in E$, donc $f = g$. Donc $A = B$

* <u>Version calcul matriciel</u>

Pour $j \in [\![1,p]\!]$ on pose $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-ième ligne $\in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On a supposé que $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$.

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $A \times E_j = B \times E_j$

ie la j-ième colonne de A = la j-ième colonne de B

Donc $A = B$.

<u>2.</u> On applique 1. avec $B = 0_{n,p}$.