Chapitre 19

Compléments sur les matrices

Sommaire

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux espace vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

1 Représentation matricielles

Dans tout ce paragraphe, et sauf mention contraire, $\mathscr{B} = \left(e_1, e_2, \dots, e_p\right)$ est une base de $\mathbb{E}$ et $\mathscr{C} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\right)$ est une base de $\mathbb{F}$.

1.1 Matrice d'une famille finie de vecteurs

On a vu que tout $u \in \mathbb{F}$ s'écrit de manière unique $u = \sum_{i=1}^{n} a_i.\varepsilon_i$ où les scalaires $(a_1, \dots, a_n)$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathscr{C}$.

On associe alors à u la matrice colonne :

$$U = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}(u;\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Plus généralement, si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{F}$, on lui associe la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que la j-ième colonne de A est égale aux coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathscr{C}$:

$$A = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{Mat}(u_1, \dots, u_p;\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \dots & u_j & \dots & u_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \; \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \; \varepsilon_i \\ \vdots \\ \leftarrow \; \varepsilon_n \end{array}$$

où les $a_{i,j}$ sont définis par : $\forall\, j \in [\![1, p]\!]$, $u_j = (a_{1,j}, \dots, a_{n,j})_{\mathscr{C}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.\varepsilon_i$

Définition 1 – Matrice d'une famille finie de vecteurs

On dit que la matrice $\underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,\ldots,u_p)$ est la *matrice associée à la famille* $(u_1,\ldots,u_p)$ *dans la base* $\mathscr{C}$.

Réciproquement, toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définit une famille $(u_1,\ldots,u_p)$ de p vecteurs de $\mathbb{E}$ telle que :

$$A = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,\ldots,u_p)$$

On en déduit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^p & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (u_1,\ldots,u_p) & \longmapsto & \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(u_1,\ldots,u_p) \end{array}$$

est une bijection de $\mathbb{F}^p$ vers $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Sa bijection réciproque est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{F}^p \\ A & \longmapsto & (u_1,\ldots,u_p) \end{array}$$

où $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.\varepsilon_i$

En particulier A définit p vecteurs de $\mathbb{K}^n$ en choisissant $\mathbb{E} = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ donne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la famille $\big((1,0,3);(2,1,0)\big)$.

✎ ***Exemple.*** La même matrice donne dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ la famille de polynômes $\big(1+3X^2, 2+X\big)$.

1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

On rappelle que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est entièrement déterminée par la donnée de la famille de vecteurs $\big(f(e_1),\ldots,f(e_p)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{F}$, grâce à la formule suivante :

$$\text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \text{ alors } f(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i.f(e_i)$$

Par conséquent l'application linéaire f est aussi entièrement déterminée par la donnée de la matrice :

$$A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{cc} \\ \\ \leftarrow & \varepsilon_1 \\ & \vdots \\ \leftarrow & \varepsilon_i \\ & \vdots \\ \leftarrow & \varepsilon_n \end{array}$$

où les $a_{i,j}$ sont définis par : $\forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = (a_{1,j},\dots,a_{n,j})_{\mathscr{C}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.\varepsilon_i$

On peut remarquer que $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}\big(f(\mathscr{B});\mathscr{C}\big)$. La matrice de gauche est celle d'une application linéaire dans des bases, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 2 – Matrice d'une application linéaire dans des bases

La matrice $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$ est appelée matrice associée à f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Réciproquement, toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ telle que :

$$A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$$

On en déduit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) \end{array}$$

est une bijection de $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ vers $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Sa bijection réciproque est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) \\ A & \longmapsto & f \end{array}$$

où $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_i a_{i,j}.\varepsilon_j\right)$ pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donne, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$, l'application linéaire $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_2[X],\mathbb{R}_1[X]\big)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 1+2X \\ f(X) & = & X \\ f(X^2) & = & 1+X \end{array}$$

donc : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ f(a+bX+cX^2) = a.f(1)+b.f(X)+c.f(X^2) = a+c+(2a+b+c)X$.

Définition 3 – Application linéaire canoniquement associée

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *application linéaire canoniquement associée à* A, l'application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et K^n.

✎ ***Exemple.*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour application linéaire canoniquement associé $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (1,2) \\ f(0,1,0) & = & (0,1) \\ f(0,0,1) & = & (1,1) \end{array}$$

et d'expression analytique :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) = (x+z, 2x+y+z)$$

Cas des formes linéaires. Dans ce cas $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ et on prend comme base de $\mathbb{K}$: $\mathscr{C} = (1)$. On remarque que la matrice asociée à une forme linéaire est une matrice ligne. Si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{E}$:

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la forme linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Matrice d'un endomorphisme dans une base

Si f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, on peut choisir la même base au départ et à l'arrivée.

On associe donc à $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ la matrice $A = \operatorname{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée plus simplement $\operatorname{Mat}(f; \mathscr{B})$ ou $\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$:

$$A = \operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \operatorname{Mat}(f;\mathscr{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\varepsilon_1) & \dots & f(\varepsilon_j) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \varepsilon_i \\ \vdots \\ \leftarrow \varepsilon_n \end{array}$$

où les $a_{i,j}$ sont définis par : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ f(\varepsilon_j) = (a_{1,j},\dots,a_{n,j})_{\mathscr{C}} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}.\varepsilon_k$

On a donc $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}\big(f(\mathscr{B});\mathscr{B}\big)$. La matrice de gauche est celle d'un endomorphisme dans une base, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 4 – Matrice d'un endomorphisme dans une base

La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$ est appelée *matrice carrée associée à l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$*.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}_n[X]$ on considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

✎ ***Exemple.*** On a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = I_n$.

Réciproquement, toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que :

$$A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$$

On en déduit que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{E}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}) \end{array}$$

est une bijection de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ vers $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 5 – Endomorphisme canoniquement associé

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *endomorphisme canoniquement associé à A*, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{K}^n\big)$ défini par A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

1.4 Interprétation du produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{i,j}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}p,1(\mathbb{K})$, le produit $A \times X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est donné par :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1,k} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{n,k} \times x_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longleftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

ie que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times x_k$$

Théorème 6 – Produit matriciel et image d'un vecteur par une application linéaire

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$, représentés matriciellement par A, X et Y. Alors :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = A \times X$$

Avec d'autres notations :

$$\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) \times \mathrm{Mat}(x;\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}\big(f(x);\mathscr{C}\big)$$

Corollaire 7 – Égalité de deux matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. On a :
$$A = B \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = B \times X$$
2. On a :
$$A = 0_{n,p} \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{n,1}$$

Ne pas confondre avec le résultat suivant :

$$A \text{ est inversible } \Longleftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \ \big(A \times X = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{p,1}\big)$$

Le théorème précédent indique aussi comment trouver l'expression analytique d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

✎ ***Exemple.*** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

donc $f(x, y, z) = (x+2y+z, z, x+2y+z)$.

✎ ***Exemple.*** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X]\big)$ l'application linéaire associée dans les bases canoniques. Pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -a+b-c \end{pmatrix}$$

donc $f(a + bX + cX^2) = (a - b + c) + (-a + b - c)X$.

1.5 Interprétation du calcul matriciel

Dans le théorème suivant, f et g sont deux applications linéaires de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ représentées par les matrices A et B dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Théorème 8 – Combinaison linéaire

Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et si on note C la matrice représentative de $\lambda.f + \mu.g$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$:

$$C = \lambda.A + \mu.B$$

Avec d'autres notations :

$$\mathrm{Mat}(\lambda.f + \mu.g; \mathscr{B}, \mathscr{C}) = \lambda.\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{C}) + \mu.\mathrm{Mat}(g; \mathscr{B}, \mathscr{C})$$

Corollaire 9 – Isomorphisme entre $\mathscr{M}_{n,p}$ et $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Si $p = \dim(\mathbb{E})$ et $n = \dim(\mathbb{F})$ alors l'application $f \longmapsto \text{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ vers $\mathscr{M}_{n,p}(\mathrm{K})$. particulier :

$$\dim\left(\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})\right) = p \times n = \dim(\mathbb{E}) \times \dim(\mathbb{F})$$

On se donne $\mathbb{G}$ un troisième espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie, et $\mathscr{D}$ une base de $\mathbb{G}$.

Dans le théorème suivant, f est une application linéaire de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ représentée par la matrice A dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et g est une application linéaire de $\mathbb{F}$ vers $\mathbb{G}$ représentée par la matrice B dans les bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Théorème 10 – Produit matriciel

On note D la matrice représentative de $g \circ f$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{D}$. Alors :

$$D = B \times A$$

Avec d'autres notations :

$$\text{Mat}(g \circ f;\mathscr{B},\mathscr{D}) = \text{Mat}(g:\mathscr{C},\mathscr{D}) \times \text{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$$

Ce théorème justifie la définition choisie pour le produit matriciel : il correspond à la composée des applications linéaires associées aux matrices. On comprend mieux pourquoi le produit matriciel est non commutatif et non intègre : il hérite ces propriétés de la composition des applications linéaires.

Les différentes règles de calcul vue pour le produit matriciel peuvent ainsi être rédémontrées via les applications linéaires.

✎ ***Exemple.*** Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, montrer que $A \times I_p = I_n \times A = A$.

On a défini les puissances entières d'une matrice carrée et d'un endomorphisme. Ces deux notions sont liées par le théorème suivant.

Proposition 11 – Puissances de matrices et d'endomorphismes

Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}\left(f^p;\mathscr{B}\right) = \left(\text{Mat}(f;\mathscr{B})\right)^p$$

1.6 Matrices inversibles et isomorphismes

Théorème 12 – Matrices inversibles et isomorphismes

Si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$ et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, on a :

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \iff A = \operatorname{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) \text{ est inversible}$$

et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\operatorname{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})\right)^{-1} = \operatorname{Mat}\left(f^{-1};\mathscr{C},\mathscr{B}\right)$$

Si f est un endomorhisme de $\mathbb{E}$, on a donc :

$$f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{E} \iff A = \operatorname{Mat}(f;\mathscr{B}) \text{ est inversible}$$

et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\operatorname{Mat}(f;\mathscr{B})\right)^{-1} = \operatorname{Mat}\left(f^{-1};\mathscr{B}\right)$$

Pour un automorphisme on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{Mat}\left(f^{p};\mathscr{B}\right) = \left(\operatorname{Mat}(f;\mathscr{B})\right)^{p}$$

Dans le résultat suivant, on rappelle que $n = \dim(\mathbb{E})$.

Corollaire 13 – Familles de vecteurs et matrices inversibles

Si $(u_1,\dots,u_n)$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$:

$$(u_1,\dots,u_n) \text{ est une base de } \mathbb{E} \iff \operatorname{Mat}(u_1,\dots,u_n;\mathscr{B}) \text{ est une matrice inversible}$$

Ce résultat donne en particulier un moyen simple de montrer qu'une matrice est inversible : vérifier que ses colonnes forment une famille libre.

✎ ***Exemple.*** $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible et $\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1&1\\1&0&0&\dots&0&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&0&\dots&0&1\\1&1&1&\dots&1&1\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne l'est pas.

1.7 Changement de bases

On reprend $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{E}$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{F}$, et on se donne $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_p)$ une autre base de $\mathbb{E}$ et $\mathscr{C}' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ une autre base de $\mathbb{F}$.

Définition 14 – Matrice de passage d'un base à une autre

On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice :

$$P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}(\mathscr{B}'; \mathscr{B}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

On a donc :

$$P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & \dots & e'_j & \dots & e'_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \lambda_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \lambda_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{p,1} & \dots & \lambda_{p,j} & \dots & \lambda_{p,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_i \\ \vdots \\ \leftarrow e_p \end{array}$$

où les $\lambda_{i,j}$ sont définis par : $\forall j \in [\![1, p]\!],\ e'_j = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j}.e_i$

✎ ***Exemple.*** On a : $P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}} = I_p$

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$, déterminer $P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$.

En considérant l'application linéaire $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, on a

$$P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}; \mathscr{B}', \mathscr{B})$$

Proposition 15 – Produit de matrices passages

1. Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de $\mathbb{E}$. Alors :

$$P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}''} = P_{\boxed{\mathscr{B}}\longrightarrow\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}'\longrightarrow\boxed{\mathscr{B}''}}$$

2. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{E}$. Alors $P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$ est inversible et :

$$(P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\longrightarrow\mathscr{B}}$$

Les matrices de passage sont utilisées pour les changements de base.

Théorème 16 – Formule de changement de bases pour une famille de vecteurs

1. Cas d'un vecteur. Si $x \in \mathbb{E}$, on pose $X = \mathrm{Mat}(x;\mathscr{B})$, $X' = \mathrm{Mat}(x;\mathscr{B}')$ et $P = P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$. Alors :
$$X = P \times X' \qquad X' = P^{-1} \times X$$
2. Cas d'une famille de vecteurs. Si $\mathscr{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on pose $M = \mathrm{Mat}(\mathscr{F};\mathscr{B})$, $M' = \mathrm{Mat}(\mathscr{F};\mathscr{B}')$ et $P = P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$. Alors :
$$M = P \times M' \qquad M' = P^{-1} \times M$$

Étudions maintenant le cas d'une application linéaire.

Corollaire 17 – Formule de changement de bases pour une application linéaire

1. Cas général. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, on pose $A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$, $A' = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}',\mathscr{C}')$, $P = P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}\longrightarrow\mathscr{C}'}$. Alors :
$$A = Q \times A' \times P^{-1} \quad \text{et} \quad A' = Q^{-1} \times A \times P$$
2. Cas d'un endomorphisme. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on pose $A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$, $A' = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}')$ et $P = P_{\mathscr{B}\longrightarrow\mathscr{B}'}$. Alors :
$$A = P \times A' \times P^{-1} \quad \text{et} \quad A' = P^{-1} \times A \times P$$

2 Noyau, image et rang d'une matrice

2.1 Noyau et image d'une matrice

On se donne $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n\right)$ l'application linéaire canoniquement associée.

Définition 18 – Noyau d'une matrice

On appelle *noyau de A* la partie de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ suivante :
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K});\ AX = 0_{n,1}\right\}$$

Le noyau de A est donc l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0_{n,1}$.

Remarquer que :
$$(x_1,\dots,x_p) \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$

En identifiant $\mathbb{K}^p$ et $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$, mais c'est un abus de notation.

On dit que A est *injective* lorsque $\text{Ker}(A) = \{0_{p,1}\}$. On a :

$$f \text{ est injective} \iff A \text{ est injective}$$

Définition 19 – Image d'une matrice

On appelle *image de A* la partie de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\text{Im}(A) = \{AX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K});\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$$

L'image de A est donc l'ensemble des $Y \in \mathscr{M}_{p,1}[\mathbb{K})$ pour lesquels le système linéaire $AX = Y$ est compatible.

Remarquer que :

$$(y_1, \dots, y_n) \in \text{Im}(f) \iff \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \text{Im}(A)$$

En identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\text{Im}(A) = \text{Im}(f)$, mais c'est un abus de notation.

On dit que A est *surjective* lorsque $\text{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a :

$$f \text{ est surjective} \iff A \text{ est surjective}$$

2.2 Rang d'une matrice

On suppose que $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 20 – Rang d'une matrice

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $(C_1, \dots, C_p)$ la famille de p vecteurs définie par les colonnes de A dans ~~la base canonique de $\mathbb{K}^n$~~. On appelle alors *rang de A*, l'entier naturel défini par :
M_{n,1}(|K)

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

On a donc : $\text{rg}(A) = \dim\big(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)\big)$

✎ ***Exemple.*** $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Proposition 21 – Lien avec l'application linéaire canoniquement associée

Si f est l'application linéaire canoniquement associée à A, alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$.

Le rang vérifie les règles de calcul suivantes.

Théorème 22 – Règles de calcul du rang

1. $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
2. Si $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$: $\text{rg}(AB) \leq \min\big(\text{rg}(A), \text{rg}(B)\big)$.
   Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible : $\text{rg}(CA) = \text{rg}(A)$.
   Si $E \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible : $\text{rg}(AE) = \text{rg}(A)$.
3. Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Le résultat suivant donne une manière algorithmique de calculer le rang d'une matrice.

Théorème 23 – Rang d'une matrice échelonnée par colonnes

Si A est échelonné par colonnes alors:

$$\text{rg}(A) = \text{nombre de colonnes non nulles de } A = \text{ nombre de pivots de } A$$

L'algorithme de Gauss-Jordan permet donc de calculer le rang d'une matrice : la matrice de départ a même rang que la matrice échelonnée par colonnes donnée par l'algorithme. De plus l'algorithme peut être effectué sur les lignes ou sur les colonnes.

⚠ Par contre pour calculer *l'inverse* d'une matrice avec la méthode du miroir, il ne faut effectuer l'algorithme que sur les lignes.

✎ ***Exemple.*** $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

⚠ On peut parfois conclure sans l'algorithme de Gauss-Jordan : $\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0_{n-2} & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 2.$

✎ ***Exemple.*** Déterminer le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

Théorème 24 – Rang de la transposée

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg}\left({}^tA\right) = \text{rg}(A)$.

Donc le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de vecteurs formée par ses lignes.

Théorème 25 – Rang d'une matrice échelonnée par lignes

Si A est échelonné par lignes alors :

$$\text{rg}(A) = \text{ nombre de lignes non nulles de } A = \text{ nombre de pivots de } A$$

2.3 Lien avec les autres notions de rang

Théorème 26 – Lien avec les autres notions de rang

1. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, et si A est la matrice représentative de $(u_1, \dots, u_p)$ dans une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, alors :
$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \text{rg}(A)$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, et si A est la matrice de f dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$, alors :
$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$$
3. Si (S) est un système linéaire, et si A est la matrice de ses coefficients, alors :
$$\text{rg}(S) = \text{rg}(A)$$

Le calcul algorithmique du rang d'une matrice permet donc de calculer le rang des autres objets de l'algèbre linéaire.

Théorème 27 – Rang et inversibilité

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$A \text{ est inversible} \Longleftrightarrow \text{rg}(A) = n$$

On peut utiliser ce résultat pour montrer qu'une famille de vecteurs d'une base de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que les vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1)$ et $u_3 = (-1,-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 28 – Théorème du rang pour une matrice

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$p = \text{ nombre de colonnes de } A = \dim\big(\text{Ker}(A)\big) + \text{rg}(A)$$

2.4 Caractérisations des matrices inversibles

On est désormais en mesure de démontrer le résultat suivant.

Théorème 29 – Caractérisations d'une matrice inversible

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a équivalence des propriétés suivantes :

(i) A est inversible ;

(ii) A est inversible à gauche ;

(iii) A est inversible à droite ;

(iv) $\mathrm{rg}(A) = n$;

(v) $A \underset{L}{\sim} I_n$;

(vi) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$ ie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \left(AX = 0_{n,1} \Longrightarrow X = 0_{n,1}\right)$$

(vii) $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ie :

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K});\ \ AX = B$$

(viii) $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ie :

$$\forall B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K});\ \ AX = B$$

(ix) les colonnes de A forment une base de M n,1(|K)

(x) les lignes de A forment une base de M 1,n(|K)

(xi) l'application linéaire canoniquement associée à A est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

3 Déterminants

Dans tout ce paragraphe, n est entier naturel non nul.

3.1 Déterminant d'une matrice carrée

On va étudier des applications $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, c'est-à-dire des applications qui associe un scalaire à une matrice carrée.

Dans la suite, on identifiera la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec le n-uplet de ses colonnes qu'on notera $\big(C_1(A), \dots, C_n(A)\big) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(K)\right)^n$. On notera indifféremment $f(A)$ ou $f\big(C_1(A), \dots, C_n(A)\big)$.

Définition 30 – Application multilinéaire

On dit que f est *multilinéaire* si f est linéaire par rapport à chaque colonne des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ et pour toutes matrices colonnes $(C_1, \dots, C_{j-1}, C_{j+1}, \dots, C_n)$, l'application :

$$X \longmapsto f(C_1, \dots, C_{j-1}, X, C_{j+1}, \dots, C_n)$$

est une forme linéaire de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

⚠ Cela ne signifie pas que f est linéaire.

Définition 31 – Application antisymétrique

On dit que f est *antisymétrique* si pour toutes matrices colonnes $(C_1, \dots, C_n)$:

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \left(i \neq j \Longrightarrow f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) \right)$$

Si on échange deux colonnes de A alors on obtient $-f(A)$.

Définition 32 – Application alternée

On dit que f est *alternée* si pour toutes matrices colonnes $(C_1, \dots, C_n)$,

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \left(i \neq j \text{ et } C_i = C_j \Longrightarrow f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = 0 \right)$$

Si deux colonnes de A sont égales alors $f(A) = 0$.

Proposition 33 – Antisymétrique $\Longleftrightarrow$ alternée

On a pour f multilinéaire : f est antisymétrique $\Longleftrightarrow$ f est alternée

On admettra le théorème suivant.

Théorème 34 – Existence et unicité du déterminant

Il existe une unique application $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que :

(i) f est multilinéaire :

(ii) f est antisymétrique ;

(iii) $f(I_n) = 1$.

D'après (ii) cette application est alternée.

Définition 35 – Déterminant

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *déterminant* de A le scalaire $f(A)$, où f est la fonction du théorème précédent.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ alors $\det(A)$ est noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{vmatrix}$

Proposition 36 – Déterminant dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$

Si a, b, c et d sont des scalaires, alors : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ sont deux vecteurs du plan, et si $\mathscr{P}$ est le parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle *aire algébrique* de $\mathscr{P}$:

- l'aire de $\mathscr{P}$ comptée positivement, si une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à $[0, \pi]$;
- l'aire de $\mathscr{P}$ comptée négativement, si une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ appartient à $]-\pi, 0]$.

Alors cette aire algébrique est donnée par $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

De même, on peut montrer que si $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ sont trois vecteurs du plan, et si $\mathscr{P}$ est le parallépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, alors le volume algébrique de $\mathscr{P}$ est donnée par $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$.

Le déterminant généralise donc la notion d'aire algébrique en dimension finie quelconque.

3.2 Propriétés du déterminant

Proposition 37 – Premières propriétés

1. Si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda.A) = \lambda^n.\det(A)$
3. Si A a deux colonnes égales, alors $\det(A) = 0$

⚠ ne pas se tromper sur le deuxième point.

Proposition 38 – Opérations élémentaires sur les colonnes

1. Si on échange deux colonnes de A alors on obtient $-\det(A)$
2. Si on multiplie une colonne par $\lambda \in \mathbb{K}$ alors on obtient $\lambda.\det(A)$
3. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Si on effectue l'opération $C_i \longleftarrow C_i + \lambda.C_j$ on obtient $\det(A)$

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Si on effectue l'opération $C_i \longleftarrow \mu.C_i + \lambda.C_j$ on obtient $\mu.\det(A)$ donc :

$$\det(A) = \det\big(C_1(A), \dots, C_i(A), \dots, C_n(A)\big) = \frac{1}{\mu}\det\big(C_1(A), \dots, \mu C_i(A) + \lambda C_j(A), \dots, C_n(A)\big)$$

On en déduit que si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et si $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\det(A \times T_{i,j}) = -\det(A) \qquad \det(A \times D_i(\lambda)) = \lambda.\det(A) \qquad \det(A \times U_{i,j}(\lambda)) = \det(A)$$

Et donc pour $A = I_n$:

$$\det(T_{i,j}) = -1 \qquad \det(D_i(\lambda)) = \lambda \qquad \det(U_{i,j}(\lambda)) = 1$$

✎ ***Exemple.*** Si $A = \big(C_1(A), \dots, C_n(A)\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on définit la matrice $B = \big(C_n(A), \dots, C_1(A)\big)$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Proposition 39 – Déterminant d'une matrice triangulaire

Si A est triangulaire alors $\det(A)$ = produit des coefficients diagonaux de A

En utilisant l'algorithme de Gauss sur les colonnes d'une matrice, on peut donc calculer son déterminant.

ou les lignes

✎ ***Exemple.*** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

✎ ***Exemple.*** Pour $a \in \mathbb{K}$, calculer $\begin{vmatrix} a & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & a \end{vmatrix}$ déterminant d'ordre n

et n entier naturel non nul

3.3 Déterminant et produit matriciel

Lemme 40 – Déterminant et matrices élémentaires

Si E est une matrice élémentaire alors $\det(E) \neq 0$.
De plus, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A \times E) = \det(A).\det(E)$

Théorème 41 – Caractérisation des matrices inversibles

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

On retrouve donc qu'une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

On se donne $\mathbb{E}$ un espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{E}$ et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n de vecteurs de $\mathbb{E}$, où $n = \dim(\mathbb{E})$.

Définition 42 – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

On appelle *déterminant de la famille de vecteurs* $(u_1, \dots, u_n)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det\big(\mathrm{Mat}(u_1, \dots, u_n; \mathcal{B})\big)$$

Il existe une formule de changement de base pour les déterminants mais elle n'est pas au programme.

On peut montrer que si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\left|\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)\right|$ est le « volume » du parallélotope construit sur les vecteurs u_1, ..., u_n.

Théorème 43 – Déterminant et bases

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \exists \mathcal{B} \text{ base de } \mathbb{E} ; \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

Dans ce cas le déterminant est non nul dans n'importe quelle base de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la famille $\big((1,2,3), (2,3,1), (3,2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 44 – Déterminant d'un produit

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B) = \det(BA)$

⚠ Par contre $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)$. Le déterminant n'est pas linéaire mais multilinéaire.

⚠ $\det(AB) = \det(BA)$ bien qu'en général $AB \neq BA$

Corollaire 45 – Déterminant de l'inverse

Si A est inversible, alors $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Corollaire 46 – Formules utiles

1. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = \left(\det(A)\right)^p$
2. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $\det\left(P \times A \times P^{-1}\right) = \det(A)$.

Théorème 47 – Déterminant de la transposée

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$

Par conséquent, le déterminant est linéaire par rapport à chacune des lignes. Il est de plus antisymétrique et alterné par rapport aux lignes.

Pour calculer un déterminant on peut effectuer des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes d'une matrice.

⚠ Pour calculer l'inverse d'une matrice par la méthode du miroir, il ne faut faire des opérations *que sur les lignes*.

Proposition 48 – Interprétation d'un déterminant nul

Un déterminant est nul ssi ses colonnes sont liées ssi ses lignes sont liées.

3.4 Développement par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne

On se donne $A = ((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

Définition 49 – Mineur d'indice (i,j)

Pout tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle *mineur d'indice* (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue « en rayant » dans A la ligne i et la colonne j.

On commence par un premier résultat de simplification.

Lemme 50 – Cas d'une ligne de 0 terminée par 1

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

On en déduit les deux formules suivantes.

Théorème 51 – Développement par rapport à une colonne

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors on peut calculer $\det(A)$ en développant suivant la j-ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \Delta_{i,j}$$

Théorème 52 – Développement par rapport à une ligne

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors on peut calculer $\det(A)$ en développant suivant la i-ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \Delta_{i,j}$$

Ces théorèmes permettent de se ramener à des déterminants de taille inférieure d'une unité. On peut donc les appliquer par récurrence pour se ramener à des déterminants de taille 1 ou 2.

Les calculs sont aisés pour des déterminants de taille 3 mais deviennent rapidement très complexes (pour un déterminant de taille 25 un ordinateur performant a besoin de 50 000 ans).

Du point de vue algorithmique il est donc préférable d'utiliser l'algorithme de Gauss. Mais pour des calculs formels avec des déterminants qui dépendent d'une ou plusieurs variables, il est plus aisé d'utiliser le développement par rapport à une ligne ou une colonne.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la colonne 3, puis par rapport à la ligne 2.

✎ ***Exemple.*** Calculer le déterminant de taille n : $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

✎ ***Exemple.*** Démontrer la *règle de Sarrus* pour les déterminants de taille 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a.e.i + d.h.c + g.b.f) - (g.e.c + a.h.f + d.b.i)$$

3.5 Déterminant d'un endomorphisme

Dans cette dernière section, $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$.

Lemme 53 – Indépendance vis à vis du choix de la base

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de $\mathbb{E}$ alors : $\det\big(\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})\big) = \det\big(\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}')\big)$

On en déduit que le scalaire $\det\big(\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})\big)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$.

Définition 54 – Déterminant d'un endomorphisme

On apelle *déterminant de f*, noté $\det(f)$, le déterminant de la matrice représentative de f dans n'importe quelle base de $\mathbb{E}$.

On peut montrer que $|\det(f)|$ est le coefficient par lequel f multiplie les volumes.

✎ ***Exemple.*** $\det(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = 1$

✎ ***Exemple.*** Si $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(\lambda.\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = \lambda^{\dim \mathbb{E}}$

✎ ***Exemple.*** Si p est une projection différente de $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$: $\det(p) = 0$

✎ ***Exemple.*** Si s est une symétrie par rapport à un sev $\mathbb{F}$ dans la direction $\mathbb{G}$, alors $\det(s) = (-1)^{\dim \mathbb{G}}$

Théorème 55 – Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{E}$.

1. $\det(g \circ f) = \det(g) \times \det(f) = \det(f \circ g)$
2. f est un automorphisme $\iff \det(f) \neq 0$

   Dans ce cas : $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir représenter matriciellement un vecteur, une famille de vecteurs ou une application linéaire.

- ✪ Réciproquement savoir définir un vecteur, une famille de vecteurs ou une application linéaire à partir d'une matrice représentative.
- ✪ Savoir interpréter le calcul matriciel en termes de calcul avec des vecteurs ou des applications linéaires.
- ✪ Savoir résoudre un problème sur des matrices en le remplaçant par un problème sur des applications linéaires.

➥ Connaître les formules de changement de bases.

➥ Connaître les notions de noyau, d'image et de rang d'une matrice.

- ✪ Faire lien avec les mêmes notions pour l'application linéaire qui est représentée.

➥ Savoir calculer un déterminant :

- ✪ en utilisant que c'est une forme multilinéaire alternée, antisymétrique ;
- ✪ en le mettant sous forme triangulaire ;
- ✪ en développant par rapport à une ligne ou un colonne.

➥ Savoir utiliser le déterminant pour déterminer si une matrice est inversible ou si un endomorphisme est un automorphisme.

5 Exercices

Représentations matricielles

EXERCICE 1. Représentations d'applications linéaires

Donner la matrice relativement aux base canoniques, pour les applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^3P' \in \mathbb{R}_4[X]$
2. $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \in \mathbb{R}^3$
3. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $f(1,2) = (0,5,8),\ f(2,3) = (5,0,1)$

EXERCICE 2. Changement de bases

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous ?
   Ecrire la formule de changement de base obtenue.
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
   On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?
   Ecrire la formule de changement de base obtenue.

EXERCICE 3. Représentation matricielle d'un endomorphisme

1. Montrer que $\mathscr{B} = \big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer la matrice de f dans cette base.

EXERCICE 4. Matrices et isomorphismes

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = \big(P(0), P'(0), P(1)\big)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer φ^{-1} (on pourra utiliser les représentations matricielles).

EXERCICE 5. Calculs de noyaux, d'images et de rangs

Dans chacun des cas suivants on définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer $rg(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 6. Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que f est nilpotent d'ordre p : c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.

1. Montrer que si $x \in \mathbb{E} \backslash \{0_{\mathbb{E}}\}$ est tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_{\mathbb{E}}$, alors la famille $\mathscr{F} = \left(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre.
2. Dans le cas $p = n$, donner la matrice de f dans cette base (dans ce cas, on dit que f est un endomorphisme cyclique).

EXERCICE 7. Rang de la transposée

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé. On note aussi $r = \mathrm{rg}(A)$ et $J_r \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs définie par :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

On se donne $\mathbb{G}$ un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans $\mathbb{K}^p$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$ adaptée à la somme directe $\mathbb{G} \oplus \mathrm{Ker}(u) = \mathbb{K}^p$.

1. Montrer que la famille $\left(u(e_1), \dots, u(e_r)\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^n$ telle que la matrice représentative de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ soient égale à J_r.
3. En déduire qu'il deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_rQ^{-1}$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$.

EXERCICE 8. Matrice de Vandermonde et polynômes de Lagrange

Soient x_0, x_1, …, x_n des réels deux à deux distincts. On considère la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice V est inversible.
2. En déduire que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Déterminant

EXERCICE 9. Une information sur la dimension

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de $\mathbb{E}$ vérifiant $f^2 = -\mathrm{Id}$. Montrer que l'espace $\mathbb{E}$ est de dimension paire.

EXERCICE 10. Des calculs

Vérifier les calculs de déterminants suivants.

1. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc.$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\right).$

3. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2abc(a-c)(b-c)(b-a).$

4. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c).$

5. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c).$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix} = -4\sin\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{c-a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{b-c}{2}\right).$

EXERCICE 11. Diagonalisation

Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ de matrice respective dans la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une *valeur propre de f* lorsque λ est racine du polynôme $\det(\lambda.\mathrm{id} - f)$. Déterminer les valeurs propres de f.
   (b) Pour chaque valeur propre λ de f, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda.\mathrm{id})$ et en déduire une base de $\mathbb{C}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
2. Même questions avec g.

EXERCICE 12. Une matrice tridiagonale

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminer D_n en fonction de n.
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

EXERCICE 13. Déterminants de taille n

1. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}$$

   Hint : remplacer C_1 par $C_1 + \cdots + C_n$ puis L_i par $L_i - L_1$ ($i \geq 2$).

2. En déduire que :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \ldots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)\,n^{n-1}}{2}$$

EXERCICE 14. Déterminant de taille n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} i$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}$$

Hint : se ramener à un déterminant triangulaire.

EXERCICE 15. Déterminant de Vandermonde

Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Calculer le déterminant de la matrice :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Hint : On pourra introduire le polynôme $P = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & X \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & X^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & X^n \end{pmatrix}$

EXERCICE 16. Inégalités de Kolmogorov

Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ avec $n \geq 2$.

1. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right|$.

2. (a) À l'aide de l'égalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $h > 0$: $M_1 \leq h \dfrac{M_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$.
   (b) En déduire que $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$.
3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que : $M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

EXERCICE 17. Une base de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $\left(X^k (1-X)^{n-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.