Chapitre 2

Arithmétique, dénombrement et manipulation des symboles Σ et Π

Sommaire

1 Ensemble de nombres usuels

• Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
On définit des intervalles d'entiers, notés avec des doubles crochets :
si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ est tel que $n \leq p$, on note $[\![n, p]\!] = \{k \in \mathbb{N} / n \leq k \leq p\}$.

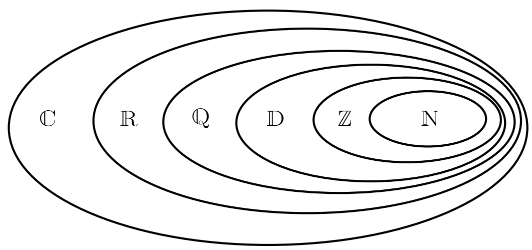
• Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

• Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
Il contient strictement l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux.

• Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$.
Les intervalles sont notés avec des crochets simples $[a, b[$ etc...

• Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{a + ib; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ils vérifient la chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.



La propriété d'*intégrité* de la multiplication est fondamentale dans la résolution d'équations :
si a et b sont deux nombres alors : $ab = 0 \iff \big(\, a = 0 \text{ ou } b = 0 \,\big)$
On en déduit que : $ac = bc \iff \big(\, c = 0 \text{ ou } a = b \,\big)$

2 Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{Z}$

2.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 1 – Diviseur/Multiple

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
On dit que b *divise* a lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$.
On le note alors $b \mid a$.
On dit alors que b est un *diviseur* de a, et que a est un *multiple* de b.

✎ ***Exemple.*** 2 est un diviseur de 6 ; 6 est donc un multiple de 2.
L'ensemble des diviseurs de 6 est $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$.
L'ensemble des diviseurs positifs de 6 est $\{1, 2, 3, 6\}$.

✎ ***Exemple.*** 2 ne divise pas 3.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, $b \mid 0$. Par contre pour tout $a \in \mathbb{Z}$: $0 \mid a \iff a = 0$.

✎ ***Exemple.*** Si $a \in \mathbb{Z}$ alors a admet toujours 1 et $|a|$ pour diviseurs positifs.

Proposition 2 – Divisibilité et relation d'ordre

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \neq 0$.
Si $b \mid a$ alors $|b| \leq |a|$.

Donc les diviseurs d'un entier relatif $a \neq 0$ sont tous dans l'intervalle $[\![-|a|, |a|]\!]$.

Proposition 3 – Règles de calcul pour la relation de divisibilité

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

1. **Transitivité**. $c \mid b$ et $b \mid a \Longrightarrow c \mid a$
2. **Réflexivité**. $a \mid a$
3. $b \mid a$ et $a \mid b \Longrightarrow a = \pm b$
4. $c \mid a$ et $c \mid b \Longrightarrow c \mid (a + b)$ et $c \mid (a - b)$
5. $b \mid a$ et $d \mid c \Longrightarrow bd \mid ac$
6. $b \mid a \Longrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, b^p \mid a^p$

✎ ***Exemple.*** Soit $(a, d) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d \mid a$ et $d \mid a^2 + a + 1$. Montrer que $d = \pm 1$.

2.2 Division euclidienne

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 4 – Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{et} \quad 0 \leq r \leq b - 1$$

q et r sont respectivement appelés le *quotient* et le *reste* de la division euclidienne de a par b.

✎ ***Exemple.*** Pour $a = 23$ et $b = 6$, on a : $q = 3$ et $r = 5$.
Pour $a = 12$ et $b = 3$, on a : $q = 4$ et $r = 0$.
Pour $a = 5$ et $b = 9$, on a : $q = 0$ et $r = 5$.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $a = 2^{n+1} - 1$ et $b = 2$, on a : $q = 2^n - 1$ et $r = 1$.

Proposition 5 – Division euclidienne et divisibilité

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on a équivalence de :

(i) $b \mid a$;

(ii) le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

2.3 PGCD et PPCM

Définition 6 – PGCD

Soient a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls.
On appelle PGCD de a et b le plus grand diviseur commun à a et b, c'est-à-dire le plus grand entier naturel d tel que $d \mid a$ et $d \mid b$.
On le note $\mathrm{pgcd}(a, b)$ ou encore $a \wedge b$.

Noter qu'on a toujours $\mathrm{pgcd}(a, b) \geq 0$.

Par convention $\mathrm{pgcd}(0, 0) = 0$.

On peut aussi remarquer que par définition : $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, a)$.

Proposition 7 – PGCD et divisibilité

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
Si $b \mid a$ alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = b$.

✎ ***Exemple.*** $\mathrm{pgcd}(1, a) = 1$ et $\mathrm{pgcd}(0, a) = a$.

Proposition 8 – Algorithme d'Euclide

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
En notant r le reste de la division euclidienne de a par b on a :

$$\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$$

On en déduit l'algorithme d'Eculide qui permet de calculer le PGCD de deux entiers naturels a et b :

- on veut calculer $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. On pose $a_0 = \max(a, b)$ et $a_1 = \min(a, b)$, de sorte que $a_1 \leq a_0$ et $d = \mathrm{pgcd}(a_0, a_1)$.
- **Etape 1**. Si $a_1 = 0$ alors $d = a_0$ et l'algorithme s'arrête.
  Si $a_1 \neq 0$ alors on note a_2 le reste de la division euclidienne de a_0 par a_1.
  On a alors $d = \mathrm{pgcd}(a_1, a_2)$ et $a_2 < a_1$. On passe alors à l'étape suivante.

- **Etape 2.** Si $a_2 = 0$ alors $d = a_1$ et l'algorithme s'arrête.
  Si $a_2 \neq 0$ alors on note a_3 le reste de la division euclidienne de a_1 par a_2.
  On a alors $d = \text{pgcd}(a_2, a_3)$ et $a_3 < a_2$. On passe alors à l'étape suivante.
- Et ainsi de suite...

Ce processus s'arrête car $a_0 \geq a_1 > a_2 > a_3 > \cdots \geq 0$ et comme ces nombres sont des entiers naturels, il va exister $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_{m+1} = 0$. On alors $d = \text{pgcd}(a_m, a_{m+1}) = \text{pgcd}(a_m, 0) = a_m$, c'est-à-dire que le PGCD cherché est le dernier reste non nul.

✎ ***Exemple.*** Pour $a = 24$ et $b = 9$:
$24 = 9 \times 2 + 6$, $9 = 6 \times 1 + 3$ et $6 = 3 \times 2 + 0$. Le pgcd de 24 et 9 vaut 3.

Définition 9 – PPCM

Soient a et b deux entiers relatifs tous les deux non nuls.
On appelle PPCM de a et b le plus petit multiple commun à a et b, c'est-à-dire le plus petit entier naturel m tel que $a \mid m$ et $b \mid m$.
On le note $\text{ppcm}(a, b)$ ou encore $a \vee b$.

Par convention si $a = 0$ ou $b = 0$, on pose $\text{ppcm}(a, b) = 0$.

On peut aussi remarquer que par définition : $\text{ppcm}(a, b) = \text{ppcm}(b, a)$.

Proposition 10 – PPCM et divisibilité

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$.
Si $b \mid a$ alors $\text{ppcm}(a, b) = a$.

✎ ***Exemple.*** $\text{ppcm}(1, a) = a$ et $\text{ppcm}(0, a) = 0$.

Lemme 11 – Propriétés arithmétiques du PGCD et du PPCM

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Soit $\delta \in \mathbb{N}$. Alors : $\quad \big(\delta \mid a \text{ et } \delta \mid b\big) \iff \delta \mid \text{pgcd}(a, b)$
2. Soit $\mu \in \mathbb{N}$. Alors : $\quad \big(a \mid \mu \text{ et } b \mid \mu\big) \iff \text{ppcm}(a, b) \mid \mu$

Théorème 12 – Calcul du PPCM

Pour tout entiers relatifs a et b :

$$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = |a| \times |b|$$

L'algorithme d'Euclide permet de calculer $\text{pgcd}(a, b)$, et on peut ensuite en déduire $\text{ppcm}(a, b)$.

2.4 Nombres premiers

Définition 13 – Nombres premiers

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.
On dit que p est *premier* si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.
Sinon, l'entier p est dit *composé*.
On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

✎ ***Exemple.*** 2, 3, 5, 7, 11 sont premiers alors que 4, 6, 8, 9, 10, 12 sont composés.

⚠ 1 n'est ni un nombre premier, ni un nombre composé.

Pour calculer des nombres premiers, on peut utiliser le crible d'Eratosthène qui consiste à éliminer les nombres composés.
On figure dans un tableau, les entiers allant par exemple de 1 à 100.

- on élimine 1 qui est à part ;
- 2 est un nombre premier et on élimine tous les multiples de 2 qui sont, de fait, des nombres composés ;
- le premier entier restant, ici 3, est alors un nombre premier et on élimine tous ses multiples ;
- le premier entier restant, maintenant 5, est un nombre premier, on élimine tous ses multiples ;
- le premier entier restant, désormais 7, est un nombre premier, on élimine tous ses multiples ;
- enfin puisque l'entier qui suit est $11 > 10 = \sqrt{100}$, on est assuré que tous les entiers restant sont premiers !

En effet les entiers composés inférieur à 100 possède un facteur premier inférieur à $\sqrt{100}$ et ont donc été éliminés.

Théorème 14 – Décomposition primaire d'un entier naturel

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_N$ nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_N^{\alpha_N}$$

De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.
Elle est appelée *décomposition primaire* de l'entier naturel n.
Les $p_1, \ldots, p_N$ s'appellent les facteurs premiers de n.

✎ ***Exemple.*** $12 = 2^2 \times 3$, $50 = 2 \times 5^2$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$.

3 Ensembles finis - Dénombrement

3.1 Ensembles finis

Définition 15 – Cardinal

Soit E un ensemble non vide.
On dit qu'il est *fini* lorsqu'il existe un entier naturel $n \neq 0$ et une bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1,n]\!]$.
Le choix de n est alors unique : on l'appelle le *cardinal* de E, noté $\mathrm{Card}(E)$, $\#E$ ou $|E|$.

On adopte aussi la convention suivante : $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal égal à 0.

Si E est fini de cardinal $n \neq 0$ alors on peut numéroter ses éléments de 1 à n : $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Le choix de la numérotation est donné par la bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1,n]\!]$.

Proposition 16 – Un exemple important

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, alors $[\![n,p]\!]$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\left([\![n,p]\!]\right) = p - n + 1$.
En particulier $\mathrm{Card}\left([\![0,n]\!]\right) = n+1$ et $\mathrm{Card}\left([\![1,n]\!]\right) = n$.

Pour dénombrer un ensemble fini de manière rigoureuse, il faut le mettre en bijection avec un ensemble de référence, et utiliser le théorème suivant. En pratique, cette méthode sera peu utilisée.

Théorème 17 – Ensembles finis en bijection

Soient E et F deux ensembles. On suppose que :
(i) E est fini;
(ii) il existe une bijection $\psi : E \longrightarrow F$.
Alors F est fini et $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Théorème 18 – Parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini.

1. Toute partie A de E est finie et vérifie $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$.
2. Si $A \subseteq E$: $A = E \iff \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$.

⚠ ATTENTION : en général si $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$, on ne peut pas dire que $A \subseteq E$.
Et bien sûr si $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$, on ne peut pas dire que $A = E$.

Théorème 19 – Principe des tiroirs

Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. f est injective $\Longrightarrow \text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$
2. f est surjective $\Longrightarrow \text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$
3. Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ alors :

$$f \text{ est injective } \iff f \text{ est surjective } \iff f \text{ est bijective}$$

Pour les deux premières implications les réciproques sont fausses (en général).

Ce résultat est aussi connu sous le nom de *Schubfachprinzip* de Dirichlet : « Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. »
Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs.

✎ ***Exemple.*** Si on se donne 11 réels dans l'intervalle $[0, 10[$, alors au moins deux d'entre eux ont la même partie entière.

Définition 20 – Ensembles infinis

Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini. On dit aussi qu'il est de cardinal transfini.

⚠ Les cardinaux transfinis ne sont pas tous égaux : on peut ordonner les différents « infinis » selon leur taille. Par exemple on peut montrer que $\text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathbb{R})$.

3.2 Dénombrement des ensembles finis

Théorème 21 – Dénombrement des parties d'un ensemble fini

Si E est fini alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi et $\text{Card}\left(\mathscr{P}(E)\right) = 2^{\text{Card}(E)}$.

✎ ***Exemple.*** Un ensemble à n éléments a donc 2^n sous-ensembles.

✎ ***Exemple.*** Un groupe de 10 personnes effectue l'ascension de l'Everest. Combien y a-t-il de possibilités pour la composition du groupe de survivants au retour ?

Théorème 22 – Principe d'addition

1. Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cup B$ est fini et : $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$.
2. Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints : $\mathrm{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \cdots + \mathrm{Card}(A_p)$.

Dans le cas où les parties $A_1, \ldots, A_p$ ont toutes le même cardinal, ce résultat porte le nom de *principe des bergers* : « Quand les bergers veulent compter leurs moutons, ils comptent leurs pattes et divisent par quatre ».

✎ ***Exemple.*** Une classe est composée de 14 filles et 15 garçons. Combien y a-t-il d'élèves au total ?

Corollaire 23 – Cardinal d'une différence

Si A et B sont deux finis alors $B \setminus A$ l'est aussi et : $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

✎ ***Exemple.*** Dans une classe de 35 élèves, 20 sont des filles et parmi elles 12 font de l'anglais. Déterminons le nombre d'élèves de sexe féminin qui n'étudient pas l'anglais.

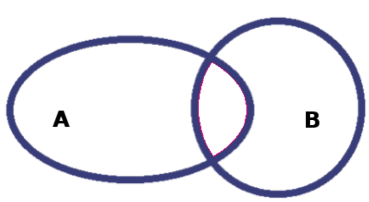
Corollaire 24 – Cardinal d'une union quelconque

Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont finis et :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

✎ ***Exemple.*** Dans une classe de 40 élèves, 30 font de l'anglais et 23 font de l'allemand. Déterminons le nombre d'élèves qui étudient les deux langues.

Ces formules se retrouvent facilement à l'aide d'un diagramme, où le cardinal d'un ensemble est représenté par son aire :



Corollaire 25 – Cardinal du complémentaire

Si E est fini et A est une partie de E alors : $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

✎ ***Exemple.*** Un classe est formée de 50 élèves. 27 ont des lunettes. Déterminer le nombre d'élèves qui ne portent pas de lunettes.

Théorème 26 – Principe de multiplication

Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés à 6 faces distinguables (par exemple un dé rouge et un dé blanc). Déterminer le nombre de déroulements possibles.

✎ ***Exemple.*** Donner le cardinal de $\{-1,;1\}^2$.

3.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis

Théorème 27 – Dénombrement de F^E

Si E et F sont deux ensembles finis alors F^E est fini et $\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$.

✎ ***Exemple.*** En 2012, l'ONU reconnaissait 197 pays dans le monde.
Un élève de PCSI dispose de 25 crayons de couleurs différentes, et veut attribuer une couleur à chacun de ces pays.
De combien de façons différentes peut-il colorier une carte du monde ?

Définition 28 – Listes

On appelle p-*liste* d'éléments d'un ensemble F, tout élément de F^p.

Une p-liste est donc un cas particulier de p-uplet (qui est un cas particuler de famille).

Théorème 29 – Dénombrement des p-listes

Le nombre de p-listes d'éléments de F est égal à $\left(\text{Card}(F)\right)^p$.

✎ ***Exemple.*** Une urne contient 10 boules numérotées. On en tire 4 avec remise.
Combien y a-t-il de déroulements possibles ?

On va maintenant dénombrer les applications injectives. Pour cela, commençons par définir la notion de factorielle d'un entier naturel.

Définition 30 – Factorielle

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
On adopte aussi la convention $0! = 1$.
Ainsi $n!$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On l'appelle la *factorielle* de n.

Par exemple $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$.

Définition 31 – Arrangements

Soient F un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq n$.
On appelle *arrangement* de p éléments de F, toute p-liste d'éléments de F dont les éléments sont deux à deux distincts.

Théorème 32 – Dénombrement des arrangements

Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est égal à :

$$A_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

✎ ***Exemple.*** $A_3^7 = 0$ et $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

✎ ***Exemple.*** Une urne contient 10 boules numérotées. On en tire 4 sans remise. Combien y a-t-il de déroulements possibles ?

✎ ***Exemple.*** Donner le nombre d'arrangements de 2 éléments de $\{-1, 1\}$.

Théorème 33 – Dénombrement des applications injectives

Soient E et F deux ensembles finis. On note $p = \text{Card}(E)$ et $n = \text{Card}(F)$.

1. Si $p \leq n$, il y a au total $\dfrac{n!}{(n-p)!} = A_n^p$ applications injectives définies sur E et à valeurs dans F.
2. Si $p > n$, il y n'a aucune application injective définie sur E à valeurs dans F.

✎ ***Exemple.*** On reprend l'exemple de l'élève de PCSI qui veut colorier la carte du monde constituée de 197 pays, mais cette fois il dispose de 250 crayons de couleurs différentes.
De combien de façons différentes peut-il colorier la carte du monde, de telle sorte que deux pays distincts ne soient pas de la même couleur ?

Corollaire 34 – Dénombrement des bijections

Si $p = n$ alors le nombre de bijections de E sur F est égal à $n!$.
Si $p \neq n$ alors il n'existe pas de bijection de E vers F.

Définition 35 – Permutations

On appelle permutation de E toute bijection de E sur E.

Une permutation modélise un « mélange » des éléments de E, puisqu'on a modifié leur numérotation.

Théorème 36 – Dénombrement des permutations

Si E est fini de cardinal n, le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

✎ ***Exemple.*** De combiens de façons différentes peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?.

Le dénombrement des surjections est plus compliqué et n'est pas au programme.

3.4 Coefficients binômiaux

Définition 37 – Coefficients binômiaux

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \in [\![0, n]\!]$.
On pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$ et on le lit « p parmi n ».

Dans certains ouvrages on utilise la notation C_n^p, mais celle-ci n'est plus utilisée en France depuis longtemps.
Nous allons voir que ces nombres interviennent dans de très nombreuses formules.

Si $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ et que l'une des deux conditions $n \geq 0$ ou $p \in [\![0, n]\!]$ n'est pas vérifiée on adopte la convention $\binom{n}{p} = 0$.

✎ ***Exemple.*** $\binom{6}{2} = \dfrac{6!}{4! \times 2!} = 15$, $\binom{2}{6} = 0 = \binom{6}{-2}$.

Définition 38 – Combinaisons

Si F est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle *p-combinaison* de F toute partie de F dont le cardinal est égal à p.

Théorème 39 – Dénombrement des combinaisons

Si F est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de p-combinaisons de F est égal à $\dbinom{n}{p}$.

Noter que ce résultat est vrai même si $p > n$ (car $0 = 0$).

✎ ***Exemple.*** Une urne contient 10 boules numérotées. On en tire 4 simultanément en un seul tirage. Combien y a-t-il de déroulements possibles ?

Proposition 40 – Règles de calcul

Soit $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$.

1. **Factorisation ou formule du pion**. Si $p \neq 0$, $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n}{p} \times \dbinom{n-1}{p-1}$

   La formule $p \times \dbinom{n}{p} = n \times \dbinom{n-1}{p-1}$ est valable même si $p = 0$.
2. **Addition ou formule de Pascal**. $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$ (sauf si $n = p = -1$)
3. **Symétrie**. $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
4. Si $n \geq 0$: $\dbinom{n}{0} = 1 = \dbinom{n}{n}$ $\dbinom{n}{1} = n = \dbinom{n}{n-1}$ et $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dbinom{n}{n-2}$

En pratique on peut calculer les $\dbinom{n}{p}$ à l'aide de leur définition avec des factorielles :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

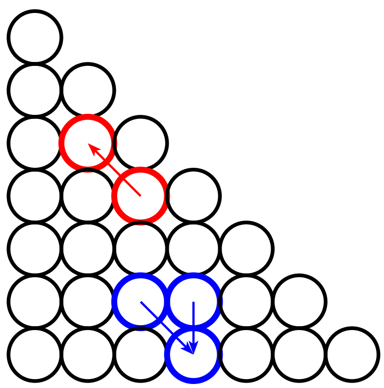
✎ ***Exemple.*** $\dbinom{20}{3} = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\dbinom{n}{p}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p. La formule de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

✎ ***Exemple.***

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ 1 & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 1 \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{cccccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 15 & \boxed{20} & 15 & 6 & 1 & \longleftarrow 6 \\ & & & \uparrow \\ & & & 3 \end{array}$$

et on en déduit $\binom{6}{3} = 20$.



Visualisations de la formule du pion et de la formule de Pascal

Proposition 41 – Les coefficients binômiaux sont des entiers naturels

Pour tout $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$: $\quad \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

3.5 Techniques de dénombrement

Pour bien dénombrer les éléments d'un ensemble fini E il faut :

- ⋆ ne compter que les éléments de E ;
- ⋆ ne pas en oublier ;
- ⋆ ne pas compter plusieurs fois le même élément, ou penser à rectifier le résultat final.

Principe de multiplication. Si on dénombre des objets en les décrivant *par étapes successives* (pour une carte : on choisit sa couleur puis sa hauteur), il faut à la fin *multiplier* les résultats.

Principe d'addition. Si on dénombre par *disjonction des cas*, il faut à la fin *additionner* les résultats.

• **p-listes :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition autorisée, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a n^p possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 4 couleurs est égal à 4^{27}.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de tirages successifs **avec remise** de p boules dans une urne de n boules est égal à n^p.

• **Arrangements :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a A_n^p possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 40 couleurs, de telle sorte que chaque pays ait une couleur différente de celle des autres est égal à A_{40}^{27}.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de tirages successifs **sans remise** de p boules dans une urne de n boules est égal à A_n^p.

• **Combinaisons :** si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, alors on a $\binom{n}{p}$ possibilités au total.

✎ ***Exemple.*** Le nombre d'équipes de football possibles dans une classe de 45 élèves est égal à $\binom{45}{11}$.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de tirages **simultanés** de p boules dans une urne de n boules est égal à $\binom{n}{p}$.

⚠ Le cas du choix de p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, n'est pas au programme.

• **Permutations :** si on **permute** n éléments, alors on a $n!$ possibilités au total. $n!$ est aussi le nombre de façons de **choisir successivement, un à un, tous les éléments d'un ensemble** de cardinal n ; en effet $A_n^n = n!$.

✎ ***Exemple.*** Le nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie est égal à 10!.

⚠ Lorsqu'on permute les éléments, certains peuvent revenir à leur position intiale ! (on parle de points fixes).

- $\boxed{\textbf{Le modèle des urnes.}}$
  - ⋆ **Urne bicolore.** On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 blanches et p_2 noires ($p_1 + p_2 = p$) qu'on peut obtenir est :
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément;
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$
      si les boules sont tirées successivement et sans remise ;e
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$
      si les boules sont tirées successivement et avec remise.
  - ⋆ **Urne tricolore.** On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires, n_2 sont blanches et n_3 sont rouges. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 noire, p_2 blanches et p_3 rouges ($p_1 + p_2 + p_3 = p$) qu'on peut obtenir est :
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\binom{n_3}{p_3}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément;
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2} A_{n_3}^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}\binom{p-p_1-p_2}{p_3}}_{\textit{Choix des tirages}}$
      si les boules sont tirées successivement et sans remise;
    - $\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2} n_3^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$
      si les boules sont tirées successivement et avec remise.
  - ⋆ Etc... Ces formules se généralisent facilement 4 couleurs ou plus.

✎ ***Exemple.*** Une urne est constituée de 3 boules blanches, 6 boules noires et 5 boules bleues. On en tire 5 au hasard. Donner le nombre de déroulements possibles qui vont donner 2 blanches, 2 noires et 1 bleue si :

i. on tire les 5 boules simultanément;
ii. on tire une par une sans remise;
ii. on tire une par une avec remise.

✎ ***Exemple.*** Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire simulaténement 5. De combien de manières peut-on avoir un plus grand numéro égal à 7?

4 Calculs de sommes et de produits

4.1 Sommes

Nous allons définir des notations qui permettent de manipuler des additions avec un nombre quelconque de termes.

Définition 42 – Symbole $\sum$

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes.

On pose : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Si $p \in [\![0, n]\!]$, on pose aussi : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$.

Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes, on pose :

$$\sum_{i\in I} a_i = \text{ somme de tous les nombres de la famille } (a_i)_{i\in I}$$

Dans le cas où $I = \emptyset$, on adopte la convention : $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Proposition 43 – Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. **Linéarité**. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda \times \sum_{i\in I} a_i$.
2. **Linéarité**. $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.
3. **Relation de Chasles**. Si $I = [\![p, n]\!]$ et $q \in I$:

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} a_k$$

Remarquer que la relation de Chasles permet de modifier les bornes de la somme, sans toucher au terme général. La pluaprt du temps on l'utilisera pour isoler le premier ou le dernier terme :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \left(\sum_{k=p}^{n-1} a_k\right) + a_n$$

L'indice de la somme est une **variable muette** :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_j = \sum_{k\in I} a_k \quad \text{ou encore} \quad \sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{i=p}^{n} a_i$$

On en déduit la propriété de changement d'indices, qui va permettre de modifier le terme général de la somme (et aussi ses bornes).

Proposition 44 – Changements d'indice

De plus on peut **décaler les indices**. Si on fixe $q \in Z$, et si on pose $k' = k + q$:

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n = a_{(p+q)-q} + a_{(p+q+1)-q} + \cdots + a_{(n+q)-q)} = \sum_{k'=p+q}^{n+q} a_{k'-q}$$

D'autre part on peut aussi **inverser** l'ordre des termes de la somme, en posant $k' = n - k$:

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{p+1} + a_p = \sum_{k'=0}^{n-p} a_{n-k'}$$

Proposition 45 – Sommation par paquets

Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$$

La sommation par paquets peut s'effectuer selon les indices pairs ou impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k &= \sum_{\substack{k=0\\k\in 2\mathbb{N}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=0\\k\in 2\mathbb{N}+1}}^{n} a_k \\
&= \sum_{\substack{k=0\\k=0\ [2]}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=0\\k=1\ [2]}}^{n} a_k \\
&= \sum_{k'=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2k'} + \sum_{k'=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a_{2k'+1}
\end{aligned}$$

où la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

4.2 Sommes usuelles à connaître

• **Sommes télescopiques.** Pour toute famille $(a_k)_{p\leq k\leq n+1}$ dans $\mathbb{C}$: $\sum_{k=p}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_p$.

De même $\sum_{k=p}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_p - a_{n+1}$ et $\sum_{k=p}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_{p-1}$

• **Sommes à terme général constant.** Pour tout $a \in \mathbb{C}$:
$\sum_{k=p}^{n} a = (n - p + 1)a = (\text{nb de termes}) \times a$.

• **Sommes arithmétiques.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

• **Somme d'Euler.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Sommes géométriques.** On a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}.$$

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

4.3 Formule du binôme de Newton

C'est une des formules les plus importantes sur les sommes.
Commençons par rappeler la convention suivante : si $z \in \mathbb{C}$ on pose $z^0 = 1$. En particulier $0^0 = 1$.

Théorème 46 – Formule du binôme

Si a et b sont deux nombres complexes et n un entier naturel :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k}$$

On a donc :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^0 = b^n + nab^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + \cdots + nba^{n-1} + a^n$$

✎ ***Exemple.*** Grâce au triangle de Pascal on calcule les $\binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

Corollaire 47 – Cas particuliers à connaître

1. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$
2. $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

4.4 Sommes doubles

Si $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est un « tableau » de nombres à n lignes et p colonnes on note :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres du tableau}$$

Visualisons le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c|cc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1p} \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{ip} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nj} & \dots & x_{np}
\end{array}$$

Nous avons encadré la ligne i et la colonne j.

Notons S_i la somme des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}$; et notons T_j la somme des nombres de la colonne T_j : $T_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.

Il est clair que la somme des sommes obtenues pour chaque ligne (resp. chaque colonne) donne la somme de tous les nombres du tableau. On en déduit le théorème suivant sur les sommes doubles.

Théorème 48 – Théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Plus généralement :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} x_{ij} &= \sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j\in J} T_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Dans un calcul, on peut donc permuter deux signes $\sum$ consécutifs.

✎ ***Exemple.*** Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right)$.

Examinons maintenant le cas plus compliqué d'un tableau triangulaire $(x_{ij})_{\substack{1\le j\le n\\ j\le i\le n}}$ à n lignes et n colonnes. On note :

$$\sum_{1\le \boxed{j\le i}\le n} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres de ce tableau}$$

Visualisons le :

$$\begin{array}{ccc|c|cccc}
x_{11} & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & \\ \hline
x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ii} & & \\ \hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{ni} & \cdots & x_{nn}
\end{array}$$

Encore une fois, nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Si S_i est la somme des nombres de la ligne i : $S_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}$; si T_j est la somme des nombres de la colonne j : $T_j = \displaystyle\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}$. Avec même raisonnement que ci-dessus on obtient le théorème suivant.

Théorème 49 – Théorème de Fubini triangulaire

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq \boxed{j\leq i}\leq n} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\right)$.

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer le produit de deux sommes.

⚠ En général $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{i\in I} b_i\right) \neq \sum_{i\in I} a_i \times b_i$!

Le théorème suivant donne la bonne formule. Remarquer que le résultat est une somme double.

Théorème 50 – Produit de deux sommes

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles finies de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i\times b_j\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_i\times b_j\right)$$

4.5 Produits

Définition 51 – Symbole Π

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0\times a_1\times\cdots\times a_n$.
Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i$ = produit de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
Dans le cas où $I = \emptyset$, on adopte la convention : $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 1$.

On peut remarquer qu'on a $\displaystyle\prod_{i\in I} a_i = 0$ dès qu'un nombre $(a_i)_{i\in I}$ est nul.

Proposition 52 – Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. **Factorisation**. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\prod_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda^{\mathrm{Card}(I)} \times \prod_{i\in I} a_i$.
2. **Multiplicativité**. $\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.
3. **Inverse**. Si tous les a_i sont non nul alors : $\prod_{i\in I} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\prod_{i\in I} a_i}$
4. **Quotient**. Si tous les b_i sont non nul alors : $\prod_{i\in I} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i\in I} a_i}{\prod_{i\in I} b_i}$

Il faut connaître la formule suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $A_n = \prod_{k=1}^{n}(2k)$ et $B_n = \prod_{k=0}^{n}(2k+1)$.

De plus on peut aussi calculer les *produits télescopiques*. Si $(a_p, a_1, \dots, a_n)$ est une famille de nombres complexes non nuls :

$$\prod_{k=p}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_p}$$

Les symboles $\sum$ et $\prod$ sont liés l'un à l'autre par les fonctions ln et exp. On a en effet les formules suivantes.

Théorème 53 – Liens entre $\sum$ et $\prod$

1. Si $a, b > 0$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$.
2. Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ famille finie de nombre réels : $\exp\left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \prod_{i\in I} \mathrm{e}^{a_i}$,

   et si les $(a_i)_{i\in I}$ sont strictement positifs : $\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$.

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- ➥ Connaître la définition et les règles de calcul de la relation de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

- ➥ Effectuer une division euclidienne.
  - ✪ Utiliser l'algorithme d'Euclide pour en déduire PGCD et PPCM.

- ➥ Connaître les formules de dénombrement.
  - ✪ Principes des tiroirs, d'addition et de multiplication.
  - ✪ Nombre de parties, de listes, de combinaisons, d'arrangements, de permutations.
  - ✪ Connaître le modèle de l'urne bicolore et l'adapter à un dénombrement de succès.
  - ✪ Connaître le modèle de l'urne tricolore et l'adapter à un dénombrement avec condition sur le min ou le max des numéros obtenus.

- ➥ Connaître les propriétés des coefficients binomiaux.
  - ✪ Définition avec des factorielles.
  - ✪ Formules du pion, de Pascal et de symétrie.
  - ✪ Calcul d'un coefficient donné avec des factorielles ou avec le triangle de Pascal.

- ➥ Calculer en utilisant les symboles $\sum$ et $\prod$.
  - ✪ Bien connaître les formules pour les sommes arithmétiques et géométriques.
  - ✪ Bien connaître la formule générale du binôme mais aussi savoir l'appliquer pour de petites puissances avec le triangle de Pascal.
  - ✪ Voir une double somme comme deux sommations successives, et être capable d'échanger les signes $\sum$ avec les théorèmes de Fubini.

6 Exercices

Arithmétique

EXERCICE 1. Équation de divisibilité

Déterminer les $x \in \mathbb{N}$ tels que $(x-2) \mid (x+2)$.

EXERCICE 2. Recherche de solutions entières

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $xy + 1 = 3x + y$.

EXERCICE 3. Algorithme d'Euclide

Déterminer le PGCD et le PPCM des entiers a et b suivants :

1. $a = 33$ et $b = 24$;
2. $a = 37$ et $b = 27$;
3. $a = 270$ et $b = 105$.

EXERCICE 4. Une propriété remarquable

1. Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}^*$ alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
2. Montrer que $\operatorname{pgcd}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\operatorname{pgcd}(a,b)} - 1$.

Dénombrements

EXERCICE 5. Numéros de téléphone

Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

EXERCICE 6. Coloriages

Un étudiant en PCSI veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : physique, chimie, SI, mathématiques, informatique, LV1 et français. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?

4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

EXERCICE 7. Formule de Pascal

Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

EXERCICE 8. Formule de Vandermonde

Dans une urne, p boules sont blanches et q sont noires. On pioche simultanément n boules.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y-a-t-il de tirages vont donner exactement k boules blanches ?
2. En déduire la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \times \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

EXERCICE 9. Dans une urne (...)

On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

EXERCICE 10. Dénombrement de k-uplets

Soit E l'ensemble de cardinal $[\![1, n]\!]$.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

EXERCICE 11. Anagrammes et cie

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot PCSI ? du mot SCIENCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

EXERCICE 12. Nombre de surjections dans des cas simples

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

EXERCICE 13. Dénombrements de permutations

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il de façons de mélanger n éléments :

1. de n'importe quelle manière ?
2. de sorte qu'un seul élément change de place ?
3. de sorte que seulement deux éléments changent de place ?
4. de sorte que seulement trois éléments changent de place ?
5. de sorte que le premier élément change de place ?
6. de sorte que le permier et le dernier éléments changent de place ?

EXERCICE 14. Cardinal de $A \cup B \cup C$

Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

EXERCICE 15. Le poker

Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Manipulations des symboles $\sum$ et $\prod$

EXERCICE 16. Calculs de sommes et de produits

Calculer les sommes et produits suivants, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \ln\left(1-\frac{2}{k}\right)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{k^2}$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k(k-1)}{k^2}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)+\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i+j)$

EXERCICE 17. Un calcul abstrait de somme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1})$ une famille de nombre complexes. Alors montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} k(a_{k+1}-a_k) = n a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

EXERCICE 18. Calculs de sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux

Calculer les sommes et produits suivant, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k},\quad \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\binom{n-1}{k}\quad \sum_{k=0}^{n} 2^{k/2}\binom{n+1}{k-1}$$

EXERCICE 19. Formules de combinatoire

1. Soient n et p deux entiers naturels tels que $n \geq p$. Calculer la somme :
$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$
2. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p+k}{k}$.
3. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \geq n$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=n}^{p}\binom{k}{n}$.
4. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=p}^{n} 3^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\right)$.

EXERCICE 20. Sur les sommes géométriques

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 1$.

1. Si $p \in [\![0, n]\!]$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} x^k = x^p \frac{1 - x^{n-p+1}}{1-x}$ par deux méthodes différentes :
   (a) en utilisant la relation de Chasles,
   (b) en utilisant un changement d'indice.
2. En déduire la valeur de sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1}$.
3. On suppose $n \neq 0$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
   Vérifier que $S_n = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$ de trois manières différentes :
   (a) en dérivant la formule de la question 1.,
   (b) en calculant $(1-x)S_n$,
   (c) en remarquant que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} x^{k-1} \right)$.

EXERCICE 21. Calculs de sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$ et $\displaystyle\sum_{1 \leq j < i \leq n} ij$.

EXERCICE 22. Exemples de sommations par paquets

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n et en déduire S_n et T_n en fonction de n.
2. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

Sujets de synthèse

EXERCICE 23. Dénombrements de parties

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets (A, B, C) de parties de E qui sont deux à deux disjointes et telles que $A \cup B \cup C = E$.

EXERCICE 24. Nombre de surjections

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
2. On suppose $p \leq n$ et considère a un élément de l'ensemble de départ noté E. En remarquant que la restriction d'une surjection à $E \backslash \{a\}$ est ou n'est pas surjective montrer que :
$$S_n^p = p \times \left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right)$$
3. En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

EXERCICE 25. Nombre de partitions d'un entier

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note σ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = p$.

1. Déterminer σ_n^0, σ_n^1, σ_n^2, σ_1^p et σ_2^p.
2. Vérifier que :
$$\sigma_{n+1}^p = \sum_{k=0}^{p} \sigma_n^k$$
3. En déduire que $\sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$. Aurait-on pu trouver ce résultat directement ?

EXERCICE 26. Formule d'inversion de Pascal

1. On considère deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$$
Montrer la relation réciproque suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle *dérangement* d'un ensemble à n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note d_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments (avec la convention $d_0 = 1$).
Vérifier que : $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
En déduire la valeur de d_n en fonction de n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments (avec la convention $S_0^p = 0$).
Vérifier que : $n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k^p$.
En déduire la valeur de S_n^p en fonction de n et p.

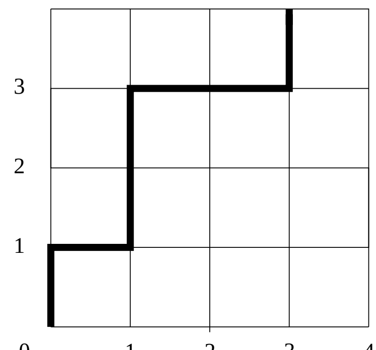
EXERCICE 27. Applications croissantes et strictement croissantes

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$.
2. Déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$.

EXERCICE 28. Chemins monotones

Un point mobile se déplace <u>sur</u> le quadrillage en reliant $O(0,0)$ à un point M de ce quadrillage de coordonnées entières (x, y).
Le point mobile est contraint de se déplacer par pas de longueurs 1, soit vers la droite, soit vers le haut. Un tel parcours est appelé un **chemin monotone**.La figure ci-contre représente un tel chemin de $O(0,0)$ à $M(3,4)$.



1. Un exemple.
   (a) Dessinez un chemin monotone de l'origine O au point M de coordonnées $(6,6)$.
   (b) Dans un chemin monotone reliant l'origine au point de coordonnées $(6,6)$, combien le point effectue-t-il de déplacements.
   (c) Dans un chemin monotone reliant l'origine au point de coordonnées $(6,6)$, combien de déplacements vers le haut effectue le point mobile? Même question vers la droite.
   (d) En déduire le nombre de chemins monotones de l'origine O au point de coordonnées $(6,6)$.
2. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Combien existe-t-il de chemins monotones reliant l'origine O au point de coordonnées $(n-p, p)$?
3. En remarquant que le premier pas d'un chemin monotone de l'origine au point $(n-p, p)$ se fait soit vers le haut, soit vers la droite, démontrez la formule d'addition de Pascal :
$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$
4. Reprenez l'exemple en début de partie. Tracez sur ce graphique la droite (Δ) d'équation $y = 6 - x$. Remarquez que tout chemin monotone reliant $O(0,0)$ au point de coordonnées $(6,6)$ coup nécessairement (Δ).
De manière générale, on admettra que tout chemin reliant O au point A de coordonnées (n,n) coupe la droite (Δ) d'équation $x + y = n$.
5. Soit $k \in [\![0,n]\!]$, on note B_k le point de (Δ) d'abscisse k. Précisez l'ordonnée de k.
   (a) Combien y a-t-il de chemins monotones de l'origine jusqu'à B_k ?
   (b) Combien existe-t-il de chemins de B_k jusqu'à A?
   (c) En déduire le nombre de chemins monotones de l'origine à A qui passent par B_k.
6. Déduisez de ce qui précède la formule :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
qui est un cas particulier de la formule de Van der Monde.