dem th 15 Soit $z \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Par contraposée on suppose $|z| \geq 1$.

Alors la suite $(|z^n|) = (|z|^n)$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (elle tend vers 1 ou $+\infty$).

Donc la suite (z^n) ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Donc la série $\sum z^n$ est grossièrement divergente.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose $|z| < 1$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$

Comme $|z| < 1$ on a $|z|^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ie $|z^{n+1}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $z^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\sum_{k=0}^{n} z^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-z}$

Donc la série $\sum z^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

L'equivalence est donc démontrée.

On fixe ensuite $p \in \mathbb{N}$ et on suppose $|z| < 1$

On pose $\forall n \geq p$, $T_n \overset{def}{=} \sum_{k=p}^{n} z^k = z^p \sum_{k=p}^{n} z^{k-p}$

$= z^p \cdot \sum_{k=0}^{n-p} z^k = z^p \times S_{n-p}$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} z^p \times \frac{1}{1-z}$

Donc la série $\sum_{n \geq p} z^n$ converge et $\sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$

Exemple 1 $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

donc la série $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum \frac{1}{2^n}$ converge

et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

Exemple 2 $\left|\frac{1}{10}\right| = \frac{1}{10} < 1$

donc la série $\sum \left(\frac{1}{10}\right)^n = \sum \frac{1}{10^n}$ converge

donc la série $\sum \frac{9}{10^n}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9 . \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

ie $0,9999 \ldots = 1$