Chapitre 20

Séries numériques

Sommaire

Le but de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible, la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et de l'utiliser dans des calculs.

1 Généralités

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne indifférement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie à partir d'un rang n_0. On lui associe une suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

Définition 1 – Série numérique

La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée *série de terme général* u_n, et est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Pour $n \geq n_0$ donné, le scalaire S_n est appelé *somme partielle de rang n* associée à la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, et le scalaire u_n est appelé *terme général* de cette série.

⚠ Il ne faut pas confondre la *série* (qui est une suite de scalaires) et ses *sommes partielles* (qui sont des scalaires).

Par abus de notation la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est notée plus simplement $\sum u_n$.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée *série harmonique.*

Proposition 2 – Les sommes partielles donnent le terme général

Si $\sum u_n$ est une série numérique définie à partir d'un rang n_0, alors :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Définition 3 – Série convergente

On dit que la série $\sum u_n$ *converge* lorsque la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, ie lorsque $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right)$ existe et est finie.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente.

Définition 4 – Série divergente

Dans le cas contraire (la limite est infinie ou elle n'existe pas), on dit que la série $\sum u_n$ *diverge.*

✎ ***Exemple.*** La série $\sum_{n\geq 0} 1$ est divergente.

✎ ***Exemple.*** La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Définition 5 – Nature d'une série

Deux séries sont dites de *même nature* lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Déterminer la nature d'une série c'est donc déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Rédaction. Pour montrer que deux séries sont de même nature il faut donc montrer que :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Cela peut arriver lorsque le terme général v_n dépend du terme général u_n.

Pour cela on montre que :

« $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge » et « $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge »

Ou par contraposée :

« $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge » et « $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge »

Ou par double contraposée :

« $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge » et « $\sum v_n$ diverge $\Longrightarrow \sum u_n$ diverge »

Proposition 6 – Premières valeurs du terme général et nature de la série

Si $n_1 \geq n_0$, alors les deux séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 7 – Somme d'une série convergente

On suppose que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge. Dans ce cas $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right)$ est appelée *somme de la série* et est notée $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n$.

La somme de la série est donc la limite des sommes partielles.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$

⚠ La nature de la série ne dépend pas des premières valeurs du terme général, par contre la somme dépend de ces valeurs.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$

Définition 8 – Reste d'une série convergente

On suppose que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge. Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Proposition 9 – Propriétés du reste d'une série convergente

Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. De plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

On peut donc utliser la *relation de Chasles* pour la somme d'une série convergente :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{p} u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$$

La propriété $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ s'écrit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right) = 0$

✎ ***Exemple.*** Pour la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n-1)}$ on a $R_n = \dfrac{1}{n}$.

⚠ Ne pas confondre les notations :

- $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ désigne la *série* (donc une suite de scalaires)
- $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ désigne la *somme partielle de rang n* de la série (donc un scalaire)

et pour une **série convergente** :

- $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ désigne le *reste de la série* (donc un scalaire)
- $S = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ désigne la *somme de la série* (donc un scalaire).

Dans la somme de la série, la variable est **muette** :

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=n_0}^{+\infty} u_p = \dots$$

On montre aussi facilement qu'on peut utiliser des *changement d'indices*.

⚠ Par contre pour le reste d'ordre n il ne faut pas prendre n comme variable de la somme, cela n'a aucun sens : $\sum_{n=n+1}^{+\infty} u_n$ n'existe pas

⚠ Comme nous l'avons déjà vu, la somme d'une série convergente dépend des premiers termes. Si $n_1 > n_0$, la relation de Chasles donne :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$$

1.2 Propriétés des séries

Théorème 10 – Dualité suite/série

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors :

$$(v_n)_{n\geq n_0} \text{ est convergente} \iff \sum (v_{n+1} - v_n) \text{ est convergente}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) - v_{n_0}$$

C'est une généralisation des sommes télescopiques aux sommes de séries, qui sert dans de nombreux calculs.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge.

Ce théorème donne aussi une nouvelle méthode pour montrer qu'une suite converge sans calculer sa limite.

Théorème 11 – Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge, alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

⚠ La réciproque est fausse comme le montre la série harmonique.

Par contraposée : si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle est *grossièrement divergente*.

✎ ***Exemple.*** Les séries $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} n!$ sont grossièrement divergentes.

Théorème 12 – Linéarité de la convergence

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors les séries $\sum(u_n+v_n)$ et $\sum(\lambda.u_n)$ convergent aussi. De plus :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda.u_n) = \lambda.\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right)$$

Si on note $\mathscr{E}$ l'ensemble des séries numériques convergentes, alors $\mathscr{E}$ muni des opérations naturelles est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Corollaire 13 – Addition de deux séries

1. On peut écrire :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$
dès qu'**au moins deux séries convergent** ; la troisième étant nécessairement convergente.
2. Si l'une des séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ converge et l'autre diverge, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
3. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de général sur $\sum(u_n+v_n)$ (on a une forme indéterminée).

Corollaire 14 – Multiplication d'une série par une constante

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum(\lambda.u_n)$ sont de même nature.

Si on multiplie $\sum_{n\geq n_0} u_n$ par $\lambda = 0$, on obtient la série nulle, qui converge vers 0. Ce cas n'est donc pas particulièrement intéressant...

1.3 Séries géométriques

On appelle série géométrique les séries de terme général z^n où $z \in \mathbb{C}$.

Ses sommes partielles sont connues. Si $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ et $n \geq p$, on a pour $z \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} z^k = z^p\frac{1-z^{n-p+1}}{1-z}$$

et si $z = 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} z^k = \sum_{k=p}^{n} 1 = n - p + 1$$

Théorème 15 – Séries géométriques

$$\sum z^n \text{ converge} \iff |z| < 1$$

Dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=p}^{+\infty} z^n = \frac{z^p}{1-z}$$

Lorsqu'elle diverge, la divergence est grossière.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

✎ ***Exemple.*** On a $0,999999\ldots\ldots = 1$ Cette étrangeté sera expliqué à la fin du chapitre.

2 Séries à termes positifs

2.1 Règles de comparaison

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries réelles à termes positifs.

En multipliant une série à termes négatifs par -1, on obtient une série à termes positifs, et ces deux séries sont de même nature.

Tout ce qui suit concerne donc aussi les séries à termes négatifs, et plus généralement **les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang**.

Définition 16 – Série à termes positifs

On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est à termes positifs lorsque : $\forall n \geq n_0\ , u_n \geq 0$.

Théorème 17 – Nature d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs. Pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n. Alors :

1. $(S_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
2. $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff (S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Dans ce cas si M est un majorant de $(S_n)_{n\geq n_0}$:
$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq M$$
3. Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Désormais on abrégera « séries à termes positifs » en SATP.

Théorème 18 – Théorème de comparaison par inégalité pour les SATP

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.
Alors : $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge, et dans ce cas $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Donc par contraposée : $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

<u>Rédaction</u>. On rédige de la manière suivante : on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

⚠ La rédaction suivante est fausse :
on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$, donc $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

En effet, on ne peut pas utiliser la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ dans un calcul tant que la convergence n'a pas été justifiée.

C'est la même erreur qu'on fait lorsqu'on confond les théorèmes de « stabilité des inégalités larges » et de « convergence par encadrement ».

✎ ***Exemple.*** $\forall n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

⚠ La réciproque est fausse : si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum_{n \geq n_0} v_n$.

On peut considérer le contre-exemple suivant : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq \dfrac{1}{n(n-1)} \leq \dfrac{1}{n}$ mais $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n \geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge.

Dans le théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, on ne peut donc pas dire que les deux séries sont de même nature.

⚠ Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant) ! Nous verrons un contre-exemple en TD (il n'est pas simple d'en construire un).

Corollaire 19 – Théorème de comparaison par équivalents pour les SATP

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r..
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Le résultat est donc plus fort que pour la comparaison par inégalité, puisque les deux séries sont de même nature

⚠ Par contre, en cas de convergence, les sommes des deux séries ne sont pas égales !

⚠ Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant). Nous verrons un contre-exemple en TD.

✎ ***Exemple.*** $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge et $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

⚠ Ne pas confondre comparaison des termes généraux et comparaison des sommes partielles.

✎ ***Exemple.*** Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ alors la série $\sum u_n$ diverge ; si $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ alors la série $\sum u_n$ converge.

Corollaire 20 – Théorème de comparaison par « grand o » pour les SATP

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r., et $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.
Alors : $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

Donc par contraposée : $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Ce résultat est bien sûr vrai si on suppose que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$, puisque c'est une condition suffisante pour que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

⚠ Cette fois les deux séries ne sont pas de même nature.

⚠ Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant).

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

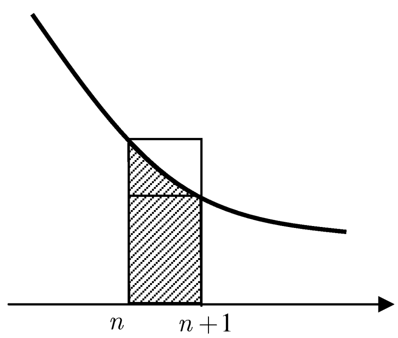
✎ ***Exemple.*** $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

Ces résultats sont très utiles pour étudier la nature d'une série. Par contre, on peut remarquer qu'ils ne donnent aucune information sur la valeur de sa somme en cas de convergence.

2.2 Comparaison à une intégrale

Dans ce paragraphe, on ne considère que des séries réelles.
Si f est continue et monotone sur l'inervalle $[n_0, +\infty[$, on peut encadrer les sommes partielles $\sum\limits_{n\geq n_0} f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

Par exemple si f est décroissante sur l'intervalle $[n, n+1]$:



On a l'inégalité :

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n)$$

Si f est croissante sur $[n, n+1]$ l'inégalité est inversée :

$$f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n+1)$$

Ensuite on additionne ces inégalités, pour différentes valeurs de n, afin de faire apparaître un encadrement des sommes partielles de la série étudiée.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq1}$, de terme général $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) - \ln(n)$, converge.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Théorème 21 – Séries de référence de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

Par contraposée : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge $\Longleftrightarrow \alpha \leq 1$

⚠ Ne pas confondre les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{1}{\alpha^n}$ (série géométrique de raison $1/\alpha$).

Dans le cas $\alpha > 1$, on ne connaît pas la valeur de $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, sauf dans des cas particuliers. La fonction ζ est appelée fonction de Riemann, et elle est reliée à de nombreux problèmes. Il est bien de connaître la valeur suivante :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Si $\sum u_n$ une SATP, le théorème de comparaison utilisé avec les séries de Riemann donne les critères simples suivants :

- s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ est finie, alors la série $\sum u_n$ converge.
- s'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Pour calculer $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n$ on dispose des croissances comparées. Ces critères seront donc utilisés dès qu'on est face des termes de la forme $n^\alpha (\ln n)^\beta \mathrm{e}^{-\gamma n}$.

⚠ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\sum u_n$ converge. Par contre si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, alors on ne peut rien en conclure ; pour montrer la divergence de $\sum u_n$ il est suffisant que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(u_n)$.

⚠ En pratique, il faut redémontrer le critère utilisé à chaque fois.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum \frac{\ln^3(n)}{n^2}$ converge et la série $\sum \frac{\ln^{12}(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

2.3 Convergence absolue

On revient au cas général où la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{K}$: elle peut être réelle de signe quelconque voir même complexe.

Définition 22 – Convergence absolue

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum |u_n|$ converge.

Dans le cas d'une série à termes positifs (ou de signe constant), la convergence absolue coïncide avec la convergence. Pour les séries dont le terme général change de signe, l'intérêt de cette notion repose sur le théorème suivant.

Théorème 23 – La convergence absolue implique la convergence

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge.

✎ ***Exemple.*** $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

✎ ***Exemple.*** Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \in]0,1[$, la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos((a^n \pi x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dans certains cas se ramener à l'étude de $\sum |u_n|$. On travaille alors avec une série à termes positifs, et tous les résultats des paragraphes précédents s'appliquent.

Proposition 24 – Propriétés des séries absolument convergentes

On se donne $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

1. Inégalité triangulaire. On a : $\displaystyle\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$
2. Linéarité de l'absolue convergence. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum(\lambda.u_n)$ sont elles aussi absolument convergentes.

Définition 25 – Série semi-convergente

Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite *semi-convergente* lorsqu'elle est convergente, mais non absolument convergente, ie que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

✎ ***Exemple.*** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (et sa somme vaut $-\ln(2)$).

Les séries semi-convergentes sont « pathologiques » : on perd même la commutativité de la somme. Leur étude n'est pas au programme.

2.4 Méthodologie pour étudier la nature d'une série

On souhaite déterminer la nature de $\sum u_n$.

- Si l'énoncé demande explicitement de montrer que la série converge *et de calculer sa somme*, il faut transformer l'expression des sommes partielles $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ en faisant apparaître par télescopage, changement d'indice, Chasles, ou linéarité des sommes partielles, des séries de références : géométriques ou de Riemann.

  On calcule ensuite $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et il faut trouver une limite finie (ce qui prouve la convergence de la série). La somme de la série est alors égale à cette limite.

- Si l'énoncé demande la nature de la série, on procède par ordre décroissant de priorité :
  - ⋆ si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ alors la série diverge grossièrement ;
  - ⋆ si u_n n'est pas de signe constant, étudier la nature de $\sum |u_n|$;
  - ⋆ chercher un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$;
  - ⋆ essayer la règle du $n^\alpha u_n$;
  - ⋆ encadrer u_n.

⚠ Une dernière remarque importante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times v_n \neq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

3 Développement décimal d'un réel

On s'intéresse ici à l'écriture d'un réel positif sous la forme d'un « nombre à virgule ».

L'écriture décimale d'un réel positif x :

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots = a_0, a_1|a_2|a_3|\ldots\ldots$$

conduit naturellement à l'étude de séries de terme général $\frac{a_n}{10^n}$, où $a_0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0,9]\!]$.

Proposition 26 – Convergence de $\sum \frac{a_n}{10^n}$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0,9]\!]$. Alors $\sum \frac{a_n}{10^n}$ converge.

On a vu que $0,999999\ldots\ldots = 1,000000\ldots\ldots$

Il y a donc plusieurs façon d'écrire un même réel avec une infinité de chiffres après la virgule.

Théorème 27 – Développement décimal propre

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il existe un unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in [\![0,9]\!]$
- (a_n) non stationnaire sur 9 a.p.c.r.
- $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Définition 28 – Développement décimal propre

Si $x \in \mathbb{R}^+$ on appelle *développement décimal propre* de x l'écriture $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par le théorème précédent.

✎ ***Exemple.*** $1/3 = 0,33333\ldots\ldots$

Pour les réels dont la suite (a_n) stationne sur 0 a.p.c.r., on peut écrire un deuxième développement décimal en remarquant que :

$$0, a_0|a_1|\ldots|a_{n-1}|a_n|0000\cdots = 0, a_0|a_1|\ldots|a_{n-1}|(a_n-1)|9999\ldots$$

On l'appelle *développement décimal impropre.* Les nombres décimaux (nombre fini de chiffres non nuls après la virgule) ont donc un *développement décimal propre et un impropre.*

✎ ***Exemple.*** $0,12345 = 0,12344999999\ldots\ldots$

Théorème 29 – Caractérisation des rationnels

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a équivalence de :

(i) x est rationnel :

(ii) le développement décimal propre de x est périodique a.p.c.r.

On peut même calculer le rationnel à partir de son développement décimal propre.

✎ ***Exemple.*** Mettre le rationnel $3,1415151515\ldots\ldots$ sous forme d'une fraction.

La notion de dévelopement décimal permet une étude fine des nombres réels. Elle a notamment permis à Cantor de prouver la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Savoir étudier la nature d'une série à l'aide de ses sommes partielles.

➥ Savoir étudier la nature d'une série à l'aide d'une comparaison de son terme général.

➥ Savoir étudier la nature d'une série à l'aide d'une comparaison à une intégrale.

- ✪ Savoir en déduire aussi un équivalent des restes (cas d'une série convergente) ou des sommes partielles (cas d'une série divergente).

➥ Savoir calculer la somme d'une série.

➥ Connaître les exemples usuels : séries géométriques et séries de Riemann.

5 Exercices

Étude pratique d'une série numérique

EXERCICE 1. Nature de séries

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n^2-5}{n(2n^+1)}$
3. $u_n = \dfrac{n-2}{2^n-1}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$
5. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$
6. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
7. $u_n = \dfrac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$
8. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
9. $u_n = n\mathrm{e}^{-n}$
10. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$
11. $u_n = \dfrac{n}{\ln(n)}$
12. $u_n = \dfrac{\ln(n)^3}{n(n+1)}$

EXERCICE 2. Dérivée de la série géométrique

Soit $x \in]-1,1[$. On souhaite montrer que la série $\sum nx^{n-1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

1. Démontrer le résultat en remarquant que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n = (n+1)x^n - nx^n$
2. Démontrer le résultat en dérivant la formule : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

EXERCICE 3. Calculs de sommes

Montrer la convergence de la série de terme général u_n puis calculer sa somme :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $u_n = \dfrac{6}{5^{n+2}}$
3. $u_n = \dfrac{2n}{3^n}$
4. $u_n = (-1)^n\dfrac{n+3}{5^n}$
5. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$

EXERCICE 4. Semi-convergence

On admet la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$. Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
3. $u_n = (-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}$
4. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

EXERCICE 5. Comparaison série-intégrale

À l'aide d'une comparaison à une intégrale, étudier la nature des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^2}$

EXERCICE 6. Séries à paramètre

Étudier la nature de la série de terme général u_n en fonction des paramètres indiqués :

1. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 7. Dualité suite-séries

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \dfrac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
   (a) Montrer que $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

EXERCICE 8. Un calcul de somme

On admettra dans cet exercice que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $T_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.
   (a) Établir que si $N \geq 1$:
   $$S_{2N} = \frac{1}{4}T_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_{2N} = \frac{1}{4}T_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
   (b) En déduire que pour $N \geq 1$: $S_{2N} = \dfrac{1}{2}T_N - T_{2N}$.
   (c) Conclure que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

EXERCICE 9. Produit infini

1. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Établir la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)$.

EXERCICE 10. Séries et suites récurrentes

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que (u_n) est strictement positive et convergente vers 0^+.
2. Pour les questions suivantes, on rappelle que : $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.
   (a) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
   (b) À l'aide de l'étude la série $\sum_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

EXERCICE 11. Jack Sparrow

Le capitaine Jack Sparrow prend une bouteille de rhum neuve et en boît la moitié. Il demande alors en second de boire la moitié du rhum restant. À son tour il récupère la bouteille et boit la moitié du rhum restant et ainsi de suite. . .Quelle quantité de rhum aura-t-il bu au final ?

Étude théorique d'une série numérique

EXERCICE 12. Critère spécial des séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. (a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}$: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$
2. Étudier la nature des séries $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$. En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente (considérer $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. . .).

EXERCICE 13. Séries de même nature

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

EXERCICE 14. Critère de d'Alembert

1. On se donne une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positifs.
   On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ avec $\ell \in \overline{R}^+ = [0,+\infty]$.

   (a) Cas où $\boxed{\ell < 1.}$
   Montrer qu'à partir d'un certain rang : $a_{n+1} \leq \dfrac{1+\ell}{2} a_n$.
   En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente.

   (b) Cas où $\boxed{\ell > 1.}$
   Avec la même méthode que précédemment, montrer que la série $\sum a_n$ est divergente.

   (c) Cas où $\boxed{\ell = 1.}$
   À l'aide des séries de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, construire un exemple où $\ell = 1$ et la série diverge, et un exemple ou $\ell = 1$ et la série converge.

2. **Applications.**

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument.

   (b) Étudier la nature de la série : $\sum \dbinom{2n}{n}$.

Sujets d'étude

EXERCICE 15. Série exponentielle

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

EXERCICE 16. Une propriété de la convergence absolue

On se donne $\sum u_n$ une série absolument convergente. Montrer que pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

EXERCICE 17. Théorème de rarrangement de Riemann sur un exemple

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.
3. Montrer qu'on a aussi $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$. Que pensez-vous de ce résultat ?

EXERCICE 18. Théorème de rarrangement de Riemann

On se donne $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha$$

EXERCICE 19. Exemple de série de fonctions

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x.

On notera $u(x)$ la somme de cette série.

2. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

   Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{1}{n+1})$.
3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + \frac{1}{n})$ est convergente. On notera s sa somme.
4. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

   On pourra considérer $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, et utiliser le fait que :

$$|u(x) - s| \leq |u(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - s_n| + |s_n - s|$$

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $s_{2n} = \ln\left(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\right)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

EXERCICE 20. Formule de Plouffe

En 1995 les mathématiciens Plouffe, Bailey et Borwein ont démontré la formule suivante :

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$$

qui permet de calculer n'importe quelle décimale de π en base 16, sans avoir à calculer les décimales précédentes.

1. (a) Pour deux entiers naturels k et p tels que $p \neq 0$, vérifier que :

$$\frac{1}{16^k(8k+p)} = \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{p-1+8k}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Démontrer que pour tout entiers naturels n et p :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k(8k+p)} = \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{p-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x - \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{8n+p+7}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

   (c) Montrer que pour tout entiers naturels n et p :

$$\left|\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{8n+p+7}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{16}{15}\int_0^{1/\sqrt{2}} x^{8n+p+7}\,\mathrm{d}x$$

   et en déduire que $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{8n+p+7}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   (d) Conclure pour tout entier naturel p la série $\sum \frac{1}{16^n(8n+p)}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n(8n+p)} = \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{p-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

2. (a) Démontrer que la série $\sum \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

   (b) À l'aide du changement de variable $y = \sqrt{2}x$ établir que :

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{16(y-1)}{y^4-2y^3+4y-4}\,\mathrm{d}y$$

   (c) Vérifier que pour tout $y \in [0,1]$:

$$\frac{16(y-1)}{y^4-2y^3+4y-4} = \frac{4-4y}{y^2-2y+2} + \frac{4}{1+(y-1)^2} + \frac{4y}{y^2-2}$$

   (d) Conclure que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right) = \pi$$