<u>dem prop 29</u> On suppose que $\dim(\mathbb{E})=n$

et que $\mathcal{B}=(\vec{e_1},\dots,\vec{e_p})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Alors $\mathcal{B}$ est une famille orthormée.

De plus $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ donc $p=\text{Card}(\mathcal{B})=n$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée et

que $p=\text{Card}(\mathcal{B})=n$

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée elle est une famille libre [cor 26].

Comme $\text{Card}(\mathcal{B})=n=\dim(\mathbb{E})$, elle est libre

maximale et est donc une base de $\mathbb{E}$.

Exemple 1 On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $i \neq j$.

Par exemple si $i < j$:

i-ième terme

j-ième terme

$$\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0$$

$$= 0$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

i-ième terme

$$\langle e_i, e_i \rangle = 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + \dots + 0 \times 0 = 1$$

Donc la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est orthonormée et est une base de $\mathbb{R}^n$ donc elle est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2 $\vec{u_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

$\vec{u_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}.(2,-1,1)$

$\vec{u_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1,1,-1)$

$\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

La famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est orthonormée car obtenue avec l'algorithme de Gram-Schmidt. Elle vérifie :

$\text{Card}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

donc d'après la prop 29 elle est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$

Exemple 3 Pour $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ on pose :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \times \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$$

ie si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ alors :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

On admet qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]$ tq $i \neq j$ on a par exemple si $i < j$:

$$\langle X^i, X^j\rangle = 0\times0 + \dots + 0\times0 + \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième}}}{1\times0} + 0\times0 + \dots + 0\times0 + \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ième}}}{0\times1} + 0\times0 + \dots + 0\times0$$
$$= 0$$

Pour $i \in [\![0,n]\!]$: $\langle X^i, X^i\rangle = 0\times0 + \dots + 0\times0 + \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ième}}}{1\times1} + 0\times0 + \dots + 0\times0 = 1$

Donc la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

__Exemple 4__ $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$P_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}.X$$

$$P_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) \times Q(t)\,dt$$

La famille (P_1, P_2, P_3) est orthonormée car obtenue avec l'algorithme de Gram-Schmidt. Elle vérifie :

$$\mathrm{Card}(P_1, P_2, P_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$$

donc d'après la prop 29 elle est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

dem th30 Soit $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base de $\mathbb{E}$ (il en existe car $\mathbb{E}$ est de dimension finie) où $n = \dim(\mathbb{E})$

D'après le théorème de Gram-Schmidt, il existe $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ famille orthonormée telle que :

$$\mathrm{Vect}(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n}) = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}) = \mathbb{E}$$

La famille $(\vec{\varepsilon_1}, \dots, \vec{\varepsilon_n})$ est génératrice minimale de $\mathbb{E}$ donc est une base de $\mathbb{E}$.

$\mathbb{E}$ admet donc des bases orthonormées.

<u>dem th31</u> : Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille orthonormée de $\mathbb{E}$

et $n = \dim(\mathbb{E})$.

D'après le cor 26 la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est libre.

D'après le théorème de la base incomplète on peut la compléter en $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{u_{p+1}}, \dots, \vec{u_n})$ base de $\mathbb{E}$.

On lui applique l'algorithme de Gram-Schmidt et on note $(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_n})$ la famille orthonormée obtenue.

On sait que $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est orthonormée

De plus $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\vec{u_k} \in \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_k})$

et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle u_k, u_k \rangle = \|\vec{u_k}\|^2 = 1 > 0$

donc par unicité dans le théorème de Gram-Schmidt :

$$(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = (\vec{w_1}, \dots, \vec{w_p}).$$

On a donc que la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}, \vec{w_{p+1}}, \dots, \vec{w_n})$ est orthonormée et formée de n vecteurs où $n = \dim(\mathbb{E})$.

Elle est donc une base orthonormée de $\mathbb{E}$ [prop 29].

On peut donc compléter toute famille orthonormée de $\mathbb{E}$ en une base de $\mathbb{E}$.

<u>Exemple 5</u> : $\vec{u_1} = (3,0,4)$ $\quad$ $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{u_1}\|} \cdot \vec{u_1} = \frac{1}{5}(3,0,4)$

On pose $\vec{w_2} = (0,1,0)$

On a $\|\vec{w_2}\| = 1$ et $\langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle = 0$ donc la famille $(\vec{w_1}, \vec{w_2})$ est orthonormée.

On pose $\vec{w_3} = \frac{1}{5}(-4,0,3)$.

On a $\|\vec{w_3}\| = 1$ et $\langle \vec{w_1}, \vec{w_3} \rangle = \langle \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle = 0$

Donc la famille $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est orthonormée.

On a $\mathrm{Card}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc la famille $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$.

<u>dem th 32</u> : Soit $\vec{u} \in \mathbb{E}$ et $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

On note $d_1, \dots, d_n$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}$:

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} d_k . \vec{e_k}$$

Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\langle \vec{u}, \vec{e_i} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} d_k . \vec{e_k}, \vec{e_i} \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \times \langle \vec{e_k}, \vec{e_i} \rangle \quad \text{par linéarité à gauche}$$

$$= d_1 \times 0 + \dots + d_{i-1} \times 0 + d_i \times 1 + d_{i+1} \times 0 + \dots + d_n \times 0$$

$$= d_i$$

Donc $\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{u}, \vec{e_k} \rangle . \vec{e_k}$

dem Th33 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vecteurs de E notés

$\vec{u} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \vec{e_k}$ et $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \vec{e_k}$ dans la base

$\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$.

1. Par bilinéarité :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \vec{e_k}, \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \vec{e_k} \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} x_i \times y_j \times \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle \right)}_{= x_i \times y_i \times 1}$$

car $\langle e_j, e_i \rangle = 0$ si $j \neq i$

et $\langle e_j, e_i \rangle = 1$ si $j = i$

donc $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}, \vec{e_i} \rangle \times \langle \vec{v}, \vec{e_i} \rangle \qquad [\text{Th32}]$$

2. En particulier :

$$\|\vec{u}\|^2 = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}, \vec{e_i} \rangle^2$$