dem prop 2   Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$.

On a $0.\overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$

donc par linéarité à gauche :

$$\phi(\overrightarrow{0_E}, \vec{v}) = \phi(0.\overrightarrow{0_E}, \vec{v}) = 0.\phi(\overrightarrow{0_E}, \vec{v}) = 0$$

et par linéarité à droite :

$$\phi(\vec{u}, \overrightarrow{0_E}) = \phi(\vec{u}, 0.\overrightarrow{0_E}) = 0.\phi(\vec{u}, \overrightarrow{0_E}) = 0$$

<u>dem prop 3</u> On suppose que $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base de E.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$ tel que :

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e_i} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \vec{e_j}$$

où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \vec{e_j}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \phi\left(\vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \vec{e_j}\right)$$

par linéarité à gauche.

Mais par linéarité à droite on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \phi\left(\vec{e_i}, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot \vec{e_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \times \phi(\vec{e_i}, \vec{e_j})$$

Donc $\phi(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \times \phi(\vec{e_i}, \vec{e_j})\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \times \alpha_j \times \phi(\vec{e_i}, \vec{e_j})\right)$$

Rem : si on connait les réels $\phi(\vec{e_i}, \vec{e_j})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on sait donc calculer les réels $\phi(\vec{u}, \vec{v})$ pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$.

⚠ Ne pas écrire :

$$\cancel{\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \vec{e_i}, \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \vec{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \times \beta_i \times \phi(\vec{e_i}, \vec{e_i})\right)}$$

C'est un <u>non sens</u>.

<u>dem prop 5</u> Soit $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ forme symétrique .

$\boxed{(i) \Longrightarrow (ii)}$ évident

$\boxed{(ii) \Longrightarrow (i)}$ On suppose ϕ linéaire à gauche.

<u>but</u> ϕ linéaire à droite.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors $\phi(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{w}) = \phi(\lambda\vec{v} + \vec{w}, \vec{u})$ car ϕ est symétrique

$= \lambda \times \phi(\vec{v}, \vec{u}) + \phi(\vec{w}, \vec{u})$ car ϕ est linéaire à gauche

$= \lambda \times \phi(\vec{u}, \vec{v}) + \phi(\vec{u}, \vec{w})$ car ϕ est symétrique

Donc ϕ est linéaire à droite.

Donc ϕ est bilinéaire .

Par double-implication: $\boxed{(i) \Longleftrightarrow (ii)}$

De même on montre que $\boxed{(i) \Longleftrightarrow (iii)}$