dem prop 24

1. Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$.

On a $\|\vec{u_1}+\vec{u_2}\|^2 = \|\vec{u_1}\|^2 + \|\vec{u_2}\|^2 + 2.\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$

Donc : $\|\vec{u_1}+\vec{u_2}\|^2 = \|\vec{u_1}\|^2 + \|\vec{u_2}\|^2$

$\iff \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = 0$

$\iff \vec{u_1} \perp \vec{u_2}$

2. On suppose que $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une famille orthogonale de $\mathbb{E}$.

On a
$$\left\| \sum_{k=1}^{p} \vec{u_k} \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{p} \vec{u_k}, \sum_{k=1}^{p} \vec{u_k} \right\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \langle \vec{u_i}, \vec{u_j} \rangle \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \left(0 + \dots + 0 + \langle \vec{u_i}, \vec{u_i} \rangle + 0 + \dots + 0 \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \|\vec{u_i}\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|\vec{u_k}\|^2$$

Exemple 1 : $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique

$$\vec{u_1} = (1,1,1)$$
$$\vec{u_2} = (1,0,0)$$
$$\vec{u_3} = (0,-1,0)$$

Alors $\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3} = (2,0,1)$

donc $\|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3}\|^2 = 5$

$$\|\vec{u_1}\|^2 + \|\vec{u_2}\|^2 + \|\vec{u_3}\|^2 = 3 + 1 + 1 = 5$$

donc $\|\vec{u_1} + \vec{u_2} + \vec{u_3}\|^2 = \|\vec{u_1}\|^2 + \|\vec{u_2}\|^2 + \|\vec{u_3}\|^2$

Mais $\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = 1 \neq 0$

dem th 25 Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ famille orthogonale de vecteurs non nuls de E.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \vec{u_k} = \vec{0_E}$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\left\langle \vec{u_i}, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \vec{u_k} \right\rangle = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \langle \vec{u_i}, \vec{u_k} \rangle \quad \text{par linéarité à droite}$$

$$= 0 + \dots + 0 + \alpha_i . \langle \vec{u_i}, \vec{u_i} \rangle + 0 + \dots + 0$$

$\langle \vec{u_i}, \vec{u_k} \rangle = 0$ si $k \neq i$

$$= \alpha_i . \|\vec{u_i}\|^2$$

et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \vec{u_k} = \vec{0_E}$ donc $\left\langle \vec{u_i}, \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u_k} \right\rangle = \langle \vec{u_i}, \vec{0_E} \rangle$

$$= 0$$

donc $\alpha_i . \|\vec{u_i}\|^2 = 0$

Mais $\vec{u_i} \neq \vec{0_E}$ donc $\|\vec{u_i}\| \neq 0$

donc $\alpha_i = 0$.

On a donc $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\alpha_i = 0$.

Donc la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est libre.

<u>Exemple 2</u> On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $C^0([0,2\pi], \mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on pose :

$$\forall t \in [0, 2\pi], \quad f_k(t) = \sin(kt)$$

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_0^{2\pi} \sin(it)\sin(jt)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big(\cos((i-j)t) - \cos((i+j)t)\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((i-j)t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((i+j)t)\,dt$$

$$\underset{i \neq j}{=} \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin((i-j)t)}{i-j}\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sin((i+j)t)}{i+j}\right]_{t=0}^{t=2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Donc la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Elle est donc libre.

<u>dem cor 26</u> Soit $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une famille orthonormée.

Alors $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|\vec{u_k}\| = 1 \neq 0$ donc $\vec{u_k} \neq \vec{0_E}$.

Donc $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, donc elle est libre.