dem du théorème de Gram-Schmidt :

On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

On note H_p le prédicat :

"si $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est une famille libre de vecteurs de E alors il existe une unique famille orthonormée $(\vec{w_1}, \dots, \vec{w_p})$ de vecteurs de E telle que :

(i) $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\vec{w_i} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_i})$

(ii) $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle \vec{u_i}, \vec{w_i} \rangle > 0$ "

Initialisation pour $p=1$ Soit $\vec{u_1}$ un vecteur de E qui forme une famille libre ie $\vec{u_1} \neq \vec{0_E}$ et donc $\|\vec{u_1}\| > 0$.

On raisonne par analyse-synthèse.

<u>ANALYSE</u> On suppose qu'il existe $w_1 \in E$ tel que $\|\vec{w_1}\| = 1$, $\vec{w_1} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$ et $\langle \vec{u_1}, \vec{w_1} \rangle > 0$.

Comme $\vec{w_1} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$: $\exists \alpha \in \mathbb{K}$, $\vec{w_1} = \alpha . \vec{u_1}$

Mais alors $1 = \|\vec{w_1}\| = |\alpha| \times \|\vec{u_1}\|$ donc $|\alpha| = \dfrac{1}{\|\vec{u_1}\|}$

Ensuite $\langle \vec{u_1}, \vec{w_1} \rangle = \langle \vec{u_1}, \alpha . \vec{u_1} \rangle = \alpha . \|\vec{u_1}\|^2$

Comme $\langle \vec{u_1}, \vec{w_1} \rangle > 0$ et comme $\alpha = \dfrac{\pm 1}{\|\vec{u_1}\|}$

on a donc $\alpha > 0$ ie $\alpha = \dfrac{1}{\|\vec{u_1}\|}$. Conclusion : $\vec{w_1} = \dfrac{1}{\|\vec{u_1}\|} . \vec{u_1}$

Si $\vec{w_1}$ existe alors il est unique.

SYNTHESE On pose $\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{u_1}\|} \cdot \vec{u_1}$

c'est un vecteur de $\mathbb{E}$ qui vérifie : $\|\vec{w_1}\| = 1$

$\vec{w_1} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$

$\langle \vec{u_1}, \vec{w_1} \rangle = \frac{1}{\|\vec{u_1}\|} \langle \vec{u_1}, \vec{u_1} \rangle = \|\vec{u_1}\| > 0$

CONCLUSION Par analyse-synthèse le vecteur $\vec{w_1}$ existe et il est unique. Donc H_1 est vrai.

Hérédité Soit $p \in \mathbb{N}^*$ entier pour lequel H_p est vrai.

Montrons que H_{p+1} est vrai.

Soient $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}, \vec{u_{p+1}}$ vecteurs de $\mathbb{E}$ qui forment une famille libre.

Alors $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_p}$ forment aussi une famille libre de $\mathbb{E}$

donc d'après H_p, les vecteurs $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_p}$ existent et sont uniques. Il reste donc à prouver l'existence et l'unicité de $\vec{w_{p+1}}$. On procède encore par analyse-synthèse.

ANALYSE Supposons qu'il existe $\vec{w_{p+1}}$ vecteur de $\mathbb{E}$ tq

la famille $(\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_p}, \vec{w_{p+1}})$ est orthonormée,

$\vec{w_{p+1}} \in \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_{p+1}})$ et $\langle \vec{u_{p+1}}, \vec{w_{p+1}} \rangle > 0$.

Comme $\overrightarrow{w_{p+1}} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}})$ il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}$ tels que $\overrightarrow{w_{p+1}} \underset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_j \overrightarrow{u_j} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \overrightarrow{u_j} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{u_{p+1}}$

D'après H_p on a
$$\overrightarrow{w_1} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1})$$
$$\overrightarrow{w_2} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{w_p} \in \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}$ appartiennent tous à $\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ et donc $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}) \subseteq \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$.

Mais la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre par hypothèse et la famille $(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p})$ est libre car orthonormée. Donc on a
$$\dim(\text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})) = p = \dim(\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}))$$
On a donc $\text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p}) = \text{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$

Donc $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \overrightarrow{u_j} \in \text{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p})$

ie il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_p$ tels que $\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \overrightarrow{u_j} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \overrightarrow{w_j}$

On obtient $\overrightarrow{w_{p+1}} = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \overrightarrow{w_j} + \alpha_{p+1} \overrightarrow{u_{p+1}}$ (2)

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Comme $\overrightarrow{w_k} \perp \overrightarrow{w_{p+1}}$ on a $\langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle = 0$

Par linéarité à droite : $0 = \sum_{j=1}^{p} \beta_j \langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{w_j} \rangle + \alpha_{p+1} \cdot \langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle$

Pour $(k,j)\in[\![1,p]\!]^2$: $\langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{w_j}\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } k=j \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

car la famille $(\overrightarrow{w_1}, \dots, \overrightarrow{w_p})$ est orthonormée.

On a donc en réinjectant : $0 = \beta_k \times 1 + \alpha_{p+1} \cdot \langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle$

Finalement : $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\beta_k = -\alpha_{p+1} \times \langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle$

En réinjectant : $\overrightarrow{w_{p+1}} = \alpha_{p+1} \times \left(-\sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle \overrightarrow{w_j} + \overrightarrow{u_{p+1}} \right)$ (3)

D'autre part $\langle \overrightarrow{w_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}}\rangle = \|\overrightarrow{w_{p+1}}\|^2 = 1$

Avec (3) on obtient par linéarité à gauche :

$$1 = \alpha_{p+1} \times \left(-\sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle \times \underbrace{\langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{w_{p+1}}\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{car } j\neq p+1}} + \langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}}\rangle \right)$$

$$\text{donc } 1 = \alpha_{p+1} \times \underbrace{\langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}}\rangle}_{>0 \text{ par hypothèse}}$$

donc $\alpha_{p+1} > 0$.

Alors si on passe à la norme dans (3) on a :

$$1 = \alpha_{p+1} \times \left\| \overrightarrow{u_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle \overrightarrow{w_j} \right\|$$

$$\text{donc } \alpha_{p+1} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{u_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}}\rangle \overrightarrow{w_j} \right\|}$$

En le réinjectant dans (3) on obtient :

$$\overrightarrow{w_{p+1}} = \frac{1}{\left\| \overrightarrow{u_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle \overrightarrow{w_j} \right\|} \cdot \left(\overrightarrow{u_{p+1}} - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle \overrightarrow{w_j} \right)$$

donc $\overrightarrow{w_{p+1}}$ est unique (s'il existe).

<u>SYNTHESE</u> On définit w_{p+1} avec la formule ci-dessus

Il est clair que $\|\overrightarrow{w_{p+1}}\| = 1$.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Par linéarité à gauche :

$$\langle \overrightarrow{w_{p+1}}, \overrightarrow{w_k} \rangle = \frac{1}{\|\ldots\|} \times \left(\langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_k} \rangle - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle \underbrace{\langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{w_k} \rangle}_{\substack{= 0 \text{ si } j \neq k \\ \text{et } = 1 \text{ si } j = k}} \right)$$

$$= \frac{1}{\|\ldots\|} \left(\langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_k} \rangle - \langle \overrightarrow{w_k}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle \right)$$

$$= 0$$

Donc la famille $(\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_p}, \overrightarrow{w_{p+1}})$ est <u>orthonormée</u>.

Par construction $\overrightarrow{w_{p+1}} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_p}, \overrightarrow{u_{p+1}})$

Mais $\overrightarrow{w_1}, \ldots, \overrightarrow{w_p}$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}$ donc

$\overrightarrow{w_{p+1}} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}})$.

Enfin par linéarité à gauche :

$$\langle \overrightarrow{w_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle = \|\overrightarrow{w_{p+1}}\|^2 = 1 = \frac{1}{\|\ldots\|} \times \left(\langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle - \sum_{j=1}^{p} \langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{u_{p+1}} \rangle \underbrace{\langle \overrightarrow{w_j}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle}_{= 0} \right)$$

Donc : $1 = \frac{1}{\| \cdots \|} \times \langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle$

donc $\langle \overrightarrow{u_{p+1}}, \overrightarrow{w_{p+1}} \rangle > 0$.

<u>CONCLUSION</u> Par analyse-synthèse le vecteur w_{p+1} existe et il est unique. Donc H_{p+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence H_p est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 1

$\vec{u_1} = (0, 1, 1)$

$\vec{u_2} = (1, 0, 1)$

$\vec{u_3} = (1, 1, 0)$

$\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique

On montre facilement que la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ est libre.
On peut donc utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt.

étape 1 On pose $\vec{v_1} = \vec{u_1} = (0, 1, 1)$

puis $\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{v_1}\|} \cdot \vec{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 1)$

étape 2 On pose $\vec{v_2} = \vec{u_2} - \langle \vec{u_2}, \vec{w_1} \rangle \cdot \vec{w_1}$

$$= (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 1)$$

$$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2, -1, 1)$$

puis $\vec{w_2} = \frac{1}{\|\vec{v_2}\|} \cdot \vec{v_2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)$

VERIF: $\langle \vec{w_1}, \vec{w_2} \rangle = 0$ ok

$\langle \vec{w_2}, \vec{w_2} \rangle = 1$

étape 3 On pose $\vec{v_3} = \vec{u_3} - \langle \vec{u_3}, \vec{w_1} \rangle \cdot \vec{w_1} - \langle \vec{u_3}, \vec{w_2} \rangle \cdot \vec{w_2}$

$$= (1, 1, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{6}} \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (2, -1, 1)$$

$$= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot (1, 1, -1)$$

puis $\vec{w_3} = \frac{1}{\|\vec{w_3}\|} \cdot \vec{w_3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1, 1, -1)$

VERIF $\langle \vec{w_1}, \vec{w_3} \rangle = \langle \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle = 0$ OK

$\langle \vec{w_3}, \vec{w_3} \rangle = 1$

La famille $(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$ est alors orthonormée.

Elle vérifie $\mathrm{Vect}(\vec{w_1}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1})$

$\mathrm{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2})$

$\mathrm{Vect}(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

$\langle \vec{u_1}, \vec{w_1} \rangle > 0$

$\langle \vec{u_2}, \vec{w_2} \rangle > 0$

$\langle \vec{u_3}, \vec{w_3} \rangle > 0$

Exemple 2. $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2, \quad \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) \times Q(t)\, dt$$

On montrera dans le TD que c'est bien un produit scalaire.

$P_1 = 1$

$P_2 = X$

$P_3 = X^2$

La famille (P_1, P_2, P_3) est libre (c'est la base canonique).

On peut donc utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt.

étape 1 On pose $Q_1 = P_1 = 1$

puis $R_1 = \dfrac{1}{\|Q_1\|} . Q_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ car $\|Q_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1\, dt = 2$

étape 2 On pose $Q_2 = P_2 - \langle P_2, R_1 \rangle . R_1$

$= X$

car $\langle P_2, R_1 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\, dt = 0$ (fct° impaire)

Puis $R_2 = \dfrac{1}{\|Q_2\|} . Q_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$

car $\|Q_2\|^2 = \langle Q_2, Q_2 \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\, dt = 2\int_{0}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$

VERIF : $\langle R_1, R_2 \rangle = 0$ ok

$\langle R_2, R_2 \rangle = 1$

étape 3 On pose $Q_3 = P_3 - \langle P_3, R_1\rangle . R_1 - \langle P_3, R_2\rangle . R_2$

$$= X^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = X^2 - \frac{1}{3}$$

car $\langle P_3, R_1\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}} dt = 2\int_{0}^{1} \frac{t^2}{\sqrt{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\langle P_3, R_2\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t^3 \, dt = 0$

Puis $R_3 = \frac{1}{\|Q_3\|} \cdot Q_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$

car $\|Q_3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} t^4 dt - \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} t^2 dt + \frac{1}{9}\int_{-1}^{1} 1 dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$

$= \frac{8}{45}$

VERIF : $\langle R_1, R_3\rangle = \langle R_2, R_3\rangle = 0$ ok

$\langle R_3, R_3\rangle = 1$???

La famille (R_1, R_2, R_3) est alors orthonormée.