<u>dem th39</u> Soient $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et $\vec{x} \in \mathbb{E}$.

Par définition on a $p_F(\vec{x}) \in \mathbb{F}$ et $\vec{x} - p_F(\vec{x}) \in \mathbb{F}^\perp$.

Montrons que c'est l'unique vecteur de $\mathbb{E}$ ayant cette propriété.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{E}$ tel que $\vec{y} \in \mathbb{F}$ et $\vec{x} - \vec{y} \in \mathbb{F}^\perp$.

On a $x = \underbrace{\vec{y}}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{x} - \vec{y}}_{\in \mathbb{F}^\perp} = \underbrace{p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{x} - p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}^\perp}$

Comme $\mathbb{F}$ et $\mathbb{F}^\perp$ sont en somme directe on a unicité de la décomposition de $\vec{x}$ et donc $\vec{y} = p_F(\vec{x})$.

Exemple 1 $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

$$\mathbb{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ; \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

1. $$\begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \boxed{-2x_2} \quad -2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3, x_4 \text{ qcq dans } \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left(\underbrace{(-1, 0, 1, 0)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(0, -1, 0, 1)}_{\vec{u_2}}\right)$

Ceci prouve que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$.
$\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires donc la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est une base de $\mathbb{F}$.
On a $\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = 0$ donc la famille $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est orthogonale.
La famille $\left(\frac{1}{\|\vec{u_1}\|} \cdot \vec{u_1}, \frac{1}{\|\vec{u_2}\|} \cdot \vec{u_2}\right)$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{F}$.
$\|\vec{u_1}\| = \|\vec{u_2}\| = \sqrt{2}$ donc la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_1}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_2}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

2. Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ on a donc :

$$p_{\mathbb{F}}(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_1} \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_1} + \left\langle \vec{v}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_2} \right\rangle \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_2}$$

$$p_F(\vec{v}) = \frac{1}{2}\times\langle \vec{v}, \vec{u_1}\rangle . \vec{u_1} + \frac{1}{2}\times\langle \vec{v}, \vec{u_2}\rangle . \vec{u_2}$$

Donc si $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ on a :

$$p_F(x, y, z, t) = \frac{1}{2}(-x+z).(-1, 0, 1, 0) + \frac{1}{2}(-y+t).(0, -1, 0, 1)$$

$$= \frac{1}{2}(x-z, y-t, z-x, t-y)$$

Donc si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$ on a :

$$\mathrm{Mat}(p_F, \mathcal{B}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} M.$$

<u>VERIF</u> : $M^2 = M$ donc M est une matrice de projection.

Exemple 2 $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ;\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

Soit $\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

On note $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = p_F(x, y, z, t) = p_F(\vec{v})$.

Comme $p_F(\vec{v}) \in F$: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma - \delta = 0 \end{cases}$

Comme $\vec{v} - p_F(\vec{v}) \in F^\perp$ et comme $F = \mathrm{Vect}(\underbrace{(-1,0,1,0)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(0,-1,0,1)}_{\vec{u_2}})$

on a $\langle \vec{v} - p_F(\vec{v}), \vec{u_1} \rangle = \langle \vec{v} - p_F(\vec{v}), \vec{u_2} \rangle = 0$

Donc $\begin{cases} (x-\alpha)\times(-1) + (z-\gamma)\times 1 = 0 \\ (y-\beta)\times(-1) + (t-\delta)\times 1 = 0 \end{cases}$

ie $\begin{cases} \alpha - \gamma = x - z \\ \beta - \delta = y - t \end{cases}$

On a donc $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma - \delta = 0 \\ \alpha \quad - \gamma \quad = x - z \\ \quad \beta \quad - \delta = y - t \end{cases}$

$L_1 + L_2$ donne $\alpha + \gamma = 0$

donc avec L_3 on a $\alpha = \frac{1}{2}(x - z)$ et $\gamma = \frac{1}{2}(z - x)$

$L_1 - L_2$ donne $\beta + \delta = 0$

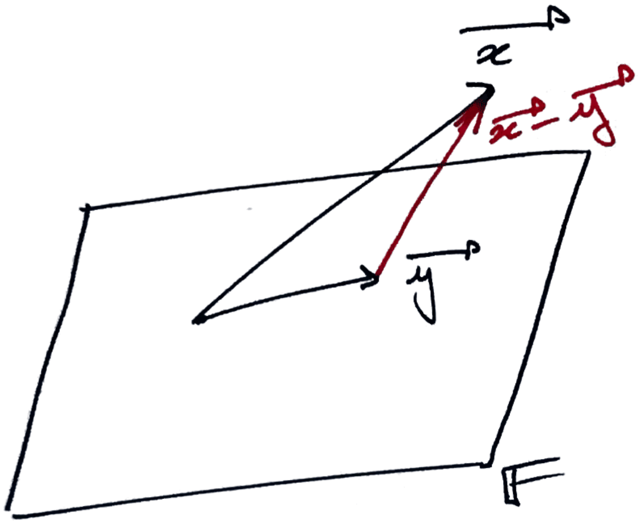
donc avec L_4 on a $\beta = \frac{1}{2}(y-t)$ et $\delta = \frac{1}{2}(t-y)$

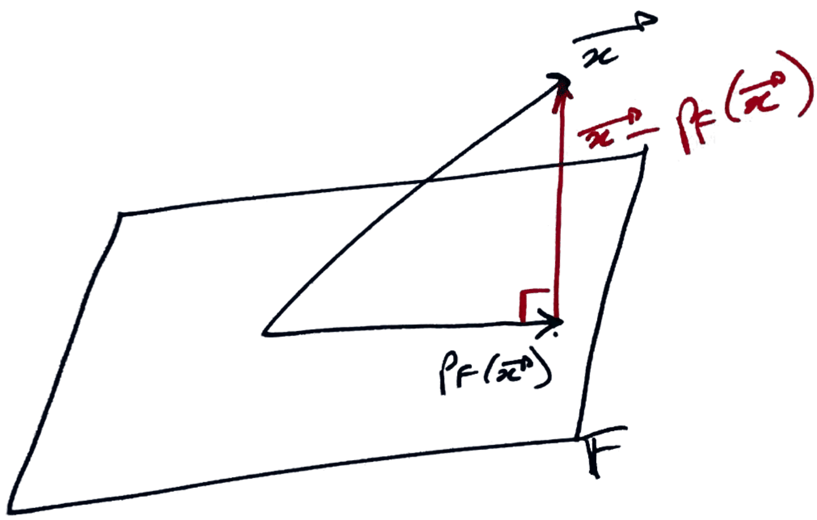
Donc $p_F(x,y,z,t) = \frac{1}{2}(x-z, y-t, z-x, t-y)$

donc si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{Mat}(p_F, \mathcal{B}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Def 40





dem th 41 Soient $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie et $\vec{x} \in \mathbb{E}$.

On a $$\vec{x} = \underbrace{p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{x} - p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}^\perp}$$

donc pour tout $\vec{y} \in \mathbb{F}$:

$$\vec{x} - \vec{y} = \underbrace{p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}} - \vec{y} + \underbrace{\vec{x} - p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}^\perp}$$

Or a $p_F(x) - y \perp \vec{x} - p_F(\vec{x})$ donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|p_F(\vec{x}) - \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$$
$$\geqslant \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$$

donc $\|\vec{x} - \vec{y}\| \geqslant \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{F}$.

Donc $$\operatorname{Inf}_{\vec{y} \in \mathbb{F}} \|\vec{x} - \vec{y}\| \geqslant \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$$

et comme $p_F(\vec{x}) \in \mathbb{F}$: $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| \geqslant \operatorname{Inf}_{\vec{y} \in \mathbb{F}} \|\vec{x} - \vec{y}\|$

Donc $$\operatorname{Inf}_{\vec{y} \in \mathbb{F}} \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$$

Rem pour le th 41 :

Soit $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

D'après le th 38 :

$$p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle . \vec{e_k}$$

et donc d'après le th 33 : $\|p_F(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle^2$

De plus $\vec{x} = \underbrace{p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{x} - p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}^\perp}$

donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$$

donc $\|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(\vec{x})\|^2}$

Donc $d(\vec{x}, \mathbb{F}) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2}$

Rem 2 pour le th 41 : Si $\mathbb{E}$ est euclidien alors $\mathbb{F}^\perp$ est aussi un sev de dimension finie donc $p_{F^\perp}$ est défini et $p_{F^\perp} = id_E - p_F$.

Donc $d(\vec{x}, \mathbb{F}) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = \|p_{F^\perp}(\vec{x})\|$

Exemple 3 Soit $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ de dimension finie.

Alors $d(\vec{x}, \mathbb{F}) = \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|$ [th41]

Donc :

$$
\begin{aligned}
d(x, \mathbb{F}) = 0 &\iff \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = 0 \\
&\iff \vec{x} - p_F(\vec{x}) = \vec{0}_E \\
&\iff p_F(\vec{x}) = \vec{x} \\
&\iff x \in \mathbb{F}
\end{aligned}
$$

Exemple 4 $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.

$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(0,0,1,0)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(1,1,1,1)}_{\vec{u_2}}\big)$$

$$\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\left(\vec{u_1}, \vec{u_2} - \vec{u_1}\right) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(0,0,1,0)}_{\vec{u_1}}, \underbrace{(1,1,0,1)}_{\vec{u_3}}\big)$$

Comme $\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}$ sont orthogonaux et non nuls, la famille $\left(\frac{1}{\|\vec{u_1}\|}.\vec{u_1}, \frac{1}{\|\vec{u_3}\|}.\vec{u_3}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$.

Donc $\left(\vec{u_1}, \frac{1}{\sqrt{3}}.\vec{u_3}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Pour $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ on a donc :

$$p_F(\vec{u}) = \langle \vec{u}, \vec{u_1} \rangle . \vec{u_1} + \left\langle \vec{u}, \frac{\vec{u_3}}{\sqrt{3}} \right\rangle . \frac{\vec{u_3}}{\sqrt{3}}$$

donc si $\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$p_F(x,y,z,t) = z.(0,0,1,0) + \frac{1}{3}(x+y+t).(1,1,0,1)$$

$$= \frac{1}{3}(x+y+t, x+y+t, 3z, x+y+t)$$

Donc si B_{cano} est la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathrm{Mat}(p_F, B_{cano}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème de meilleure approximation, si $\vec{u} = (2,0,0,1)$:

$$d(\vec{u}, F) = \| \vec{u} - p_F(\vec{u}) \|$$

$$= \| (2,0,0,1) - \frac{1}{3} \cdot (3,3,0,3) \|$$

$$= \| (1,-1,0,0) \| = \sqrt{2}$$

Exemple 5 :

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t) \times Q(t)\, dt$$ C'est un produit scalaire.

La famille $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Si on lui applique l'algorithme de Gram-Schmidt on obtient la base orthonormée $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$.

D'après le théorème de meilleure approximation :

$$d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \| X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) \|$$

et d'après le th38 :

$$p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \left\langle X^3, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle X^3, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X \right\rangle \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X$$

$$+ \left\langle X^3, \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \right\rangle \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\langle X^3, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$$

$$\langle X^3, X \rangle = \int_{-1}^{1} t^4\, dt = \frac{2}{5}$$

$$\left\langle X^3, X^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \langle X^3, X^2 \rangle - \left\langle X^3, \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^5\, dt - \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{3}\, dt$$

$$= 0 - 0 = 0$$

donc $p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = 0 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} \times X + 0 = \frac{3}{5} X$

Alors $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \|X^3 - \frac{3}{5}X\|^2 = \int_{-1}^{1} (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dt$

$$= \int_{-1}^{1} \left(t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2\right) dt$$

$$= \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{8}{175}$$

donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X]) = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$

Exemple 6 On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle A,B\rangle = Tr(A \times {}^tB) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} A_{ij} \times B_{ij}\right)$$

(voir TD).

Une base de $S_3(\mathbb{R})$ est :

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right)$$

donc une base orthonormée de $S_3(\mathbb{R})$ est :

$$\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{M_3}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M_4}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{M_5}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}}_{M_6}\right)$$

Donc si $M = \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ alors d'après le th 38 :

$$p_{S_3(\mathbb{R})}(M) = \sum_{i=1}^{6} \langle M, M_i\rangle . M_i$$

$$= 1.M_1 + 0.M_2 + 0.M_3 + \frac{-1}{\sqrt{2}} M_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} M_5 + \frac{1}{\sqrt{2}} . M_6$$

$$= \begin{pmatrix}1 & -1/2 & 1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

D'après le théorème de meilleure approximation :

$$d(M, S_3(\mathbb{R})) = \| M - p_{S_3(\mathbb{R})}(M) \| = \left\| \begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\\ -1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

<u>dem th 42</u> Soient $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ et $\vec{x} \in \mathbb{E}$.

Soit p_F la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$.

On a $\vec{x} = \underbrace{p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{x} - p_F(\vec{x})}_{\in \mathbb{F}^\perp}$

Comme $p_F(\vec{x}) \perp \vec{x} - p_F(\vec{x})$ le théorème de Pythagore nous donne :

$$\|\vec{x}\|^2 = \|p_F(\vec{x})\|^2 + \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\|^2$$

Donc $\|p_F(\vec{x})\|^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2$

donc $\|p_F(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$

De plus $\|p_F(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$

$\iff \|\vec{x} - p_F(\vec{x})\| = 0$

$\iff \vec{x} = p_F(\vec{x})$

$\iff \vec{x} \in \mathbb{F}$

Si $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$ on a :

$$p_F(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle . \vec{e_k} \qquad [\text{th } 38]$$

donc $\|p_F(\vec{x})\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle^2 \leqslant \|\vec{x}\|^2$ $\qquad$ [th 33]

Exemple 7. $C^0([0,2\pi], \mathbb{R})$ muni de sa structure préhilbertienne canonique.

Soit $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \times \cos(nt)\, dt$

On fixe $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$\forall t \in [0,2\pi],\quad g_n(t) = \cos(nt) \quad \text{donc } a_n(f) = \frac{1}{\pi}\langle f, g_n\rangle$$

La famille $(g_1, g_2, \dots, g_N)$ est alors orthogonale.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|g_n\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos(nt)^2\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2nt)}{2}\, dt$

$$= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2nt)}{4n}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\text{donc } \|g_n\| = \sqrt{\pi}$$

Donc la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} g_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_N\right)$ est orthonormée.

donc d'après l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=1}^{N} \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} g_n \right\rangle^2 \leq \|f\|^2$$

donc $$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} a_n(f)^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\, dt$$