Chapitre 21

Produits scalaires et espaces euclidiens

Sommaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

On se donne une application $\phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 1 – Forme bilinéaire

On dit que ϕ est une *forme bilinéaire* si et seulement si :

- *ϕ est linéaire à gauche* :

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{E}^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(\lambda.u + \mu.v, w) = \lambda.\phi(u, w) + \mu.\phi(v, w)$$

- *ϕ est linéaire à droite* :

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{E}^3, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(u, \lambda.v + \mu.w) = \lambda.\phi(u, v) + \mu.\phi(u, w)$$

Proposition 2 – Cas du vecteur nul

Si ϕ est une forme bilinéaire :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{E}^2, \quad \phi(u, 0_{\mathbb{E}}) = \phi(0_{\mathbb{E}}, v) = 0$$

Si $\mathbb{E}$ est de dimension finie et si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}$, on peut « développer » une forme bilinéaire sur une base.

Proposition 3 – Développement d'une forme bilinéaire sur une base

On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie avec $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\mathbb{E}$, et que ϕ une forme bilinéaire. Soient deux vecteurs décomposés sur la base $\mathscr{B}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.e_i \quad \text{et} \quad v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j.e_j$$

alors :

$$\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_i.\beta_j.\phi(e_i, e_j) \right)$$

L'application bilinéaire ϕ est donc entièrement déterminée par la donnée des réels $\phi(e_i, e_j)$, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Définition 4 – Forme symétrique

On dit que ϕ est une *forme symétrique* lorsque :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2, \quad \phi(u,v) = \phi(v,u)$$

Proposition 5 – Bilinéarité et symétrie

On suppose que ϕ est une forme symétrique. On a équivalence de :

(i) ϕ est une forme bilinéaire ;

(ii) ϕ est linéaire à gauche ;

(iii) ϕ est linéaire à droite ;

Doncs si montre que ϕ est une forme symétrique et linéaire à gauche, alors on aura montré que c'est une *forme bilinéaire symétrique*.

Définition 6 – Forme positive

On dit que ϕ est une *forme positive* lorsque :

$$\forall u \in \mathbb{E}, \quad \phi(u,u) \geq 0$$

Si ϕ est bilinéaire, on a toujours $\phi(0_{\mathbb{E}}, 0_{\mathbb{E}}) \geq 0$ car $\phi(0_{\mathbb{E}}, 0_{\mathbb{E}}) = 0$.

Définition 7 – Forme définie

On dit que ϕ est une *forme définie* lorsque :

$$\forall u \in \mathbb{E}, \quad \left(\phi(u,u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{E}}\right)$$

⚠ Ne pas confondre *forme définie* et *bien définie*.

On définit ensuite la notion de *produit scalaire* sur $\mathbb{E}$.

Définition 8 – Produit scalaire

On appelle *produit scalaire* sur $\mathbb{E}$, toute application $\phi : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est une forme bilinéaire symétrique définie et positive.

Lorsque ϕ est un produit scalaire, le réel $\phi(u,v)$ est noté $\langle u, v \rangle$ ou $\left(u \middle| v\right)$, ou encore $u.v$.

Définition 9 – Espace préhilbertien/euclidien

1. Si ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$, on dit que le couple $(\mathbb{E},\phi)$ est un *espace préhilbertien réel.*
2. De plus, si $\mathbb{E}$ est de dimension finie, alors on dit que le couple $(\mathbb{E},\phi)$ est un *espace euclidien.*

1.2 Exemples usuels

Théorème 10 – Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

On définit une application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall u = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall v = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k.y_k$$

Alors $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire défini dans le théorème précédent est appelé *produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$. On dit aussi qu'on a muni $\mathbb{R}^n$ de sa *structure canonique d'espace euclidien.*

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve que si $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ alors $\langle u, v\rangle = xx' + yy' + zz'$.

Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, on note $C^0([a,b];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[a,b]$ et à valeurs réelles.

Théorème 11 – Produit scalaire canonique sur $C^0([a,b];\mathbb{R})$

On définit une application $C^0([a,b];\mathbb{R}) \times C^0([a,b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (f,g) \in C^0([a,b];\mathbb{R}) \times C^0([a,b];\mathbb{R}), \quad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t).g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

Le produit scalaire défini dans le théorème précédent est appelé *produit scalaire canonique sur* $C^0([a,b];\mathbb{R})$. On dit aussi qu'on a muni $C^0([a,b];\mathbb{R})$ de sa *structure canonique d'espace préhilbertien.*

1.3 Norme

On suppose que $\mathbb{E}$ est un espace préhilbertien et on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire.

Définition 12 – Norme

On appelle *norme* associée à <...> l'application $\|.\|$ définie par :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$$

✎ ***Exemple.*** Vérifier les *identités remarquables* :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v \rangle \quad \text{et} \quad \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v \rangle$$

Théorème 13 – Propriétés d'une norme

La norme vérifie les deux propriétés :

- *Séparation* : $\forall u \in \mathbb{E}, \quad \big(\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0_{\mathbb{E}}\big)$
- *Homogénéité* : $\forall u \in \mathbb{E}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|\lambda.u\| = |\lambda| . \|u\|$

L'homégénité donne en particulier que $\|-u\| = \|u\|$.

L'inégalité suivante est fondamentale.

Théorème 14 – Inégalité de Cauchy-Schwarz

On l'inégalité :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2, \quad \big|\langle u,v \rangle\big| \leq \|u\| \times \|v\|$$

avec égalité si, et seulement si, u et v sont colinéaires.

On a donc :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2, \quad \langle u,v \rangle \leq \big|\langle u,v \rangle\big| \leq \|u\| \times \|v\|$$

✎ ***Exemple.*** Si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des réels :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k . y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

ou encore :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k . y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

avec égalité si, et seulement si, les listes $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ sont proportionnelles.

✎ ***Exemple.*** Si f et g sont deux fonctions continues sur le segment $[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(t).g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

ou encore :

$$\left(\int_a^b f(t).g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

avec égalité si, et seulement si, les fonctions f et g sont proportionnelles.

Corollaire 15 – Inégalité triangulaire

On a l'inégalité :

$$\forall (u,v) \in \mathbb{E}^2, \quad \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

avec égalité si, et seulement si $u = 0_{\mathbb{E}}$ ou $\left(u \neq 0_{\mathbb{E}} \text{ et il existe } \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } v = \lambda.u\right)$.

Le cas d'égalité pour l'inégalité triangulaire signifie que u et v sont colinéaires et « de même sens ».

Les propriétés de *séparation*, *homogénéité* et *inégalité triangulaire* font que la norme représente la « longueur » du vecteur. Mais attention, cette « longueur » dépend du produit scalaire choisi !

Corollaire 16 – Précisions sur l'inégalité triangulaire

1. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$:

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

2. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$:

$$\big|\,\|u\| - \|v\|\,\big| \leq \|u-v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Définition 17 – Vecteur normé

Un vecteur $u \in \mathbb{E}$ est dit *unitaire* ou *normé* lorsque $\|u\| = 1$.

✎ ***Exemple.*** Si $u \neq 0_{\mathbb{E}}$ est un vecteur quelconque alors le vecteur $\dfrac{1}{\|u\|}.u$ est unitaire.

2 Orthogonalité

Dans ce paragraphe, $\mathbb{E}$ est un espace préhilbertien. Le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 18 – Orthogonalité de deux vecteurs

On dit que deux vecteurs $(u,v) \in \mathbb{E}^2$ sont *orthogonaux* lorsque $\langle u,v\rangle = 0$. On le note $u \perp v$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, $i = (1,0,0)$ et $j = (0,1,0)$ sont orthogonaux.

✎ ***Exemple.*** Dans $C^0([0,2\pi];\mathbb{R})$ muni de sa structure préhilbertienne canonique, la fonction cos est orthogonale aux fonctions constantes.

Proposition 19 – Caractérisation du vecteur nul

Le vecteur nul $0_{\mathbb{E}}$ est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{E}$. De plus, c'est le seul vecteur de $\mathbb{E}$ ayant cette propriété :

$$\Big(\forall u \in \mathbb{E},\ \langle u,v\rangle = 0\Big) \iff v = 0_{\mathbb{E}}$$

✎ ***Exemple.*** Si $f \in C^0([0,1];\mathbb{R})$ vérifie $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour toute fonction $g \in C^0([0,1];\mathbb{R})$, alors f est constante nulle.

Définition 20 – Orthogonal d'une partie de $\mathbb{E}$

Si A est une partie quelconque de $\mathbb{E}$, on appelle *orthogonal de* A, noté $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

On a donc :

$$A^\perp = \big\{u \in \mathbb{E};\ \forall a \in A, \langle a,u\rangle = 0\big\}$$

et si $u \in \mathbb{E}$:

$$u \in A^\perp \iff \forall a \in A,\ \langle a,u\rangle = 0$$

✎ ***Exemple.*** $\emptyset^\perp = \{0_{\mathbb{E}}\}^\perp = \mathbb{E}$

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{E}^\perp = \{0_{\mathbb{E}}\}$

✎ ***Exemple.*** Déterminer l'orthogonal de $A = \big\{(1,1,1)\big\}$.

Théorème 21 – Propriété de $A^\perp$ pour A une partie quelconque de $\mathbb{E}$

Soient A et B deux parties de $\mathbb{E}$.

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.
2. Si $A = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors, pour tout $u \in \mathbb{E}$:

$$u \in A^\perp \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ \langle u, e_k\rangle = 0$$

3. Si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
4. $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$

Il est remarquable que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, même si A n'en est pas un.

Dans le même ordre d'idées, la seconde propriété s'énonce : $\{e_1, \dots, e_p\}^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp$

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)^\perp = \big\{(1,1,1)\big\}^\perp$.

2.2 Orthogonalité et familles de vecteurs

On se donne $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

Définition 22 – Famille orthogonale

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est dite *orthogonale* lorsque les vecteurs qui la compose sont deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad \big(i \neq j \Longrightarrow \langle u_i, u_j\rangle = 0\big)$$

Définition 23 – Famille orthonormée

La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est dite *orthonormale* ou *orthonormée* lorsqu'elle est orthogonale et lorsque tous les vecteurs qui la compose sont unitaires.

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, \quad \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Proposition 24 – Théorème de Pythagore

1. Si u_1 et u_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{E}$:

$$\|u_1+u_2\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 \Longleftrightarrow u_1 \perp u_2$$

2. Si $(u_1,\ldots,u_p)$ est une famille orthogonale :

$$\left\|\sum_{k=1}^{p} u_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|u_k\|^2$$

⚠ La réciproque de 2. est fausse dès que $p \geq 3$. Considérer par exemple $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,0,0)$ et $u_3=(0,-1,0)$.

Théorème 25 – Liberté d'une famille orthogonale

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

✎ ***Exemple.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\big(t \longmapsto \sin(t), t \longmapsto \sin(2t), \ldots, t \longmapsto \sin(nt)\big)$ est libre.

Corollaire 26 – Liberté d'une famille orthonormée

Toute famille orthonormée est libre.

2.3 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

On se donne $\mathscr{F}=(u_1,\ldots,u_p)$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.

Théorème 27 – Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On suppose que la famille $(u_1,\ldots,u_p)$ est libre. Il existe une unique famille *orthonormée* $\mathscr{C}=\big(w_1,\ldots,w_p\big)$ de $\mathbb{E}$ vérifiant :

1. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $w_i \in \mathrm{Vect}\big(u_1,\ldots,u_i\big)$;
2. $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle u_i, w_i\rangle > 0$.

Pour tout k entre 1 et p on a Vect(u1,...,uk)=Vect(w1,...,wk)

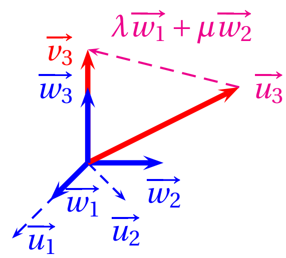
En pratique :

• on pose $v_1 = u_1$ puis $w_1 = \dfrac{1}{\|v_1\|}.v_1$

• on pose $v_2 = u_2 + \lambda.w_1$, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $\langle w_1, v_2\rangle = 0$, puis on pose $w_2 = \dfrac{1}{\|v_2\|}.v_2$

• on pose $v_3 = u_3 + \lambda.w_1 + \mu.w_2$, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ pour que $\langle w_1, v_3\rangle = \langle w_2, v_3\rangle = 0$, puis on pose $w_3 = \dfrac{1}{\|v_3\|}.v_3$

- …



La formule générale est la suivante :

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\quad w_k=\frac{1}{\left\|u_k-\sum_{j=1}^{k-1}\langle u_k,w_j\rangle.w_j\right\|}.\left(u_k-\sum_{j=1}^{k-1}\langle u_k,w_j\rangle.w_j\right)$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormaliser la famille $\big((0,1,1);(1,0,1);(1,1,0)\big)$.

✎ ***Exemple.*** Dans l'espace $\mathbb{E}=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, orthonormaliser la base canonique.

2.4 Bases orthonormées

Dans cette section, $\mathbb{E}$ est supposé de dimension finie n. Le couple $(\mathbb{E},\langle .,.\rangle)$ est donc un espace euclidien.

Définition 28 – Base orthonormée

Une *base orthonormée* de $\mathbb{E}$ est une base de $\mathbb{E}$ qui est une famille orthonormée.

Proposition 29 – Caractérisation des base orthonormées

Une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$ si, et seulement si, c'est une famille orthonormée formée de n vecteurs.

✎ ***Exemple.*** La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

✎ ***Exemple.*** La famille $\left(\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire canonique.

✎ ***Exemple.*** La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\times\frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$.

✎ ***Exemple.*** La famille $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}X, \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \dfrac{1}{3}\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t).Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 30 – Existence de bases orthonormées

Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormées.

Théorème 31 – Théorème de la base orthonormée incomplète

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{E}$, alors on peut la compléter en une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

✎ ***Exemple.*** Après avoir normalisé le vecteur $u_1 = (3, 0, 4)$, compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Dans la suite, on se donne $\mathscr{B} = \left(e_1, \dots, e_n\right)$ une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

Théorème 32 – Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Les coordonnées d'un vecteur $u \in \mathbb{E}$ dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ sont des produits scalaires :

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle . e_i$$

Théorème 33 – Produit scalaire et norme dans une base orthonormée

1. Si $u = x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n$ et $v = y_1.e_1 + \cdots + y_n.e_n$, alors :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \times y_i = x_1 \times y_1 + \cdots + x_n \times y_n = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle \times \langle v, e_i\rangle$$

2. Si $u = x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n$:

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle^2$$

⚠ On a donc une analogie avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Mais ces formules ne sont valables que dans une base orthonormée.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

On considère dans ce paragraphe un espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$. Le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$.

3.1 Supplémentaire orthogonal

Théorème 34 – Existence du supplémentaire orthogonal d'un sev de dim finie

Si $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{E}$ alors :

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp}$$

Si $\mathbb{F}$ est de dimension infinie alors $\mathbb{F} \cap \mathbb{F}^{\perp} = \{0_{\mathbb{E}}\}$ mais en général $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{\perp} \subsetneq \mathbb{E}$.

Définition 35 – Supplémentaire orthogonal d'un sev de dim finie

Si $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F}^{\perp}$ est appelé *supplémentaire orthogonal de* $\mathbb{E}$.

On dit donc **un** supplémentaire de F et **le** supplémentaire orthogonal de $\mathbb{F}$.

⚠ Le théorème d'existence d'un supplémentaire demande que $\mathbb{E}$ soit de dimension finie (donc $\mathbb{F}$ aussi). Pour l'existence du supplémentaire orthogonal, $\mathbb{E}$ peut être de dimension infinie mais $\mathbb{F}$ doit être de dimension finie.

Corollaire 36 – Supplémentaire orthogonal dans un espace euclidien

Si $\mathbb{E}$ est un espace euclidien et $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$:

1. $\dim\left(\mathbb{F}^{\perp}\right) = \dim(\mathbb{E}) - \dim(\mathbb{F})$
2. $\left(\mathbb{F}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbb{F}$
3. Si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$:

$$\mathbb{G} = \mathbb{F}^{\perp} \iff \begin{cases} \mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G} \\ \forall (u,v) \in \mathbb{F} \times \mathbb{G},\ \langle u, v \rangle = 0 \end{cases}$$

✎ ***Exemple.*** Considérons $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{F}$ le sous-espace défini par l'équation $x + y + z = 0$. Alors $\mathbb{F}^{\perp} = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathbb{F}$.

⚠ Le deuxième point n'est pas vrai en dimension infinie : on a $\mathbb{F} \subseteq \left(\mathbb{F}^{\perp}\right)^{\perp}$, mais ce n'est pas une égalité en général.

✎ ***Exemple.*** On considère $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On pose $\mathbb{F} = \left\{u \in \mathbb{E}; \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0\right\}$.

1. Montrer que $\mathbb{F}^\perp = \{0_\mathbb{E}\}$.
2. En déduire que $\mathbb{F} \subsetneq \left(\mathbb{F}^\perp\right)^\perp$ et que $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp \subsetneq \mathbb{E}$.

3.2 Projection orthogonale

Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{E}$. On sait que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^\perp$.

Définition 37 – Projecteur orthogonal

On appelle *projection orthogonale sur* $\mathbb{F}$ la projection sur $\mathbb{F}$ dans la direction $\mathbb{F}^\perp$. On la note $p_\mathbb{F}$.

⚠ Il existe une infinité de projecteur sur $\mathbb{F}$, mais un *unique* projecteur *orthogonal*.

Dasn un espace euclidien on peut aussi définir le projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}^\perp$ et on a $p_{\mathbb{F}^\perp} = \mathrm{id}_\mathbb{E} - p_\mathbb{F}$.

Théorème 38 – Détermination du projeté orthogonal

Si $x \in \mathbb{E}$ et si $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{F}$, alors le projeté orthogonal $p_\mathbb{F}(x)$ du vecteur x sur le sous-espace $\mathbb{F}$ vaut :

$$p_\mathbb{F}(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle . e_k$$

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique, on considère $\mathbb{F}$ le sous-espace d'équations :

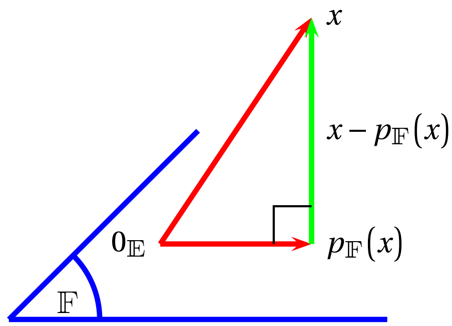
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{F}$.
2. Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur $\mathbb{F}$.

On a aussi la caractérisation suivante.

Théorème 39 – Caractérisation géométrique de $p_{\mathbb{F}}(x)$

Si $x \in \mathbb{E}$, alors $p_{\mathbb{F}}(x)$ est l'unique vecteur y de $\mathbb{E}$ vérifiant les conditions : $\begin{cases} x - y \in \mathbb{F}^{\perp} \\ y \in \mathbb{F} \end{cases}$.



✎ ***Exemple.*** Refaire l'exemple précédent.

Retour sur l'algorithme de Gram-Schmidt.

Soit $(u_1, , u_p)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$, et notons $\mathbb{F}_k = \text{Vect}(w_1, \dots, w_k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.
On peut réécrire le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la manière suivante :

- poser $w_1 = \dfrac{1}{\|u_1\|}.u_1$
- une fois les vecteurs $w_1, \dots, w_k$ construits
  - ⋆ poser $v_{k+1} = u_{k+1} - p_{\mathbb{F}_k}(u_{k+1}) = p_{\mathbb{F}_k^{\perp}}(u_{k+1})$
  - ⋆ poser $w_{k+1} = \dfrac{1}{\|v_{k+1}\|}.v_{k+1}$

La projection orthogonale permet de calculer la distance à un sev.

Définition 40 – Distance à un sev

Soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ et un vecteur $x \in \mathbb{E}$. On appelle *distance* de x au sous-espace $\mathbb{F}$:

$$d(x, \mathbb{F}) = \inf_{y \in \mathbb{F}} \|x - y\|$$

Cette distance s'exprime à l'aide du projeté orthogonal.

Théorème 41 – Meilleure approximation

Si $\mathbb{F}$ un sev de dimension finie de $\mathbb{E}$ et si $x \in \mathbb{E}$, alors $p_{\mathbb{F}}(x)$ est l'unique vecteur de $\mathbb{F}$ qui vérifie :

$$d(x,\mathbb{F}) = \|x - p_{\mathbb{F}}(x)\|$$

On a donc :

$$d(x,\mathbb{F}) = \min_{y\in\mathbb{F}} \|x-y\|$$

et ce minimum est atteint en l'unique vecteur $y = p_{\mathbb{F}}(x)$.

Donc si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$ on a :

$$d(x,\mathbb{F}) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2}$$

Si $\mathbb{E}$ est euclidien on a aussi :

$$d(x,\mathbb{F}) = \|x - p_{\mathbb{F}}(x)\| = \|p_{\mathbb{F}^\perp}(x)\|$$

✎ ***Exemple.*** Si $\mathbb{F}$ est un sev de dimension finie de $\mathbb{E}$ montrer que : $d(x,\mathbb{F}) = 0 \iff x \in \mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\big((0,0,1,0),(1,1,1,1)\big)$.
Écrire la matrice du projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$ dans la base canonique.
Calculer $d(u,\mathbb{F})$ où $u = (2,0,0,1)$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathbb{R}[X]$ calculer $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])$ pour le produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t).Q(t)\,\mathrm{d}t$.

✎ ***Exemple.*** Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $d(M, S_3(\mathbb{R}))$.

On a aussi l'inégalité suivante.

Théorème 42 – Inégalité de Bessel

Si $\mathbb{F}$ est un sev de dim finie et si $x \in \mathbb{E}$ on a $\|p_{\mathbb{F}}(x)\| \leq \|x\|$ avec égalité si, et seulement si, $x \in \mathbb{F}$.
Donc si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{F}$ on a $\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k\rangle^2 \leq \|x\|^2$ avec égalité si, et seulement si, $x \in \mathbb{F}$.

✎ ***Exemple.*** Sur $C^0([0,2\pi];\mathbb{R})$ on choisit comme produit scalaire $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Si $f \in C^0([0,2\pi];\mathbb{R})$, on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} a_n(f)^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- Savoir montrer qu'une application de $\mathbb{E}^2$ dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.
  - Ne pas confondre *forme définie* et *bien définie*.

- Connaître les exemples usuels : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et sur $C^0([a,b];\mathbb{R})$.

- Connaître les règles de calculs pour le produit scalaire et la norme.
  - Savoir démontrer des inégalités grâce à l'inégalité triangulaire ou l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

- Savoir déterminer l'orthogonal d'une partie.
  - En dimension finie, on peut prédire sa dimension ce qui simplifie la recherche.

- Connaître les propriétés des familles orthogonales et orthonormales.
  - Savoir orthonormaliser une famille libre avec l'algorithme de Gram-Schmidt.

- Connaître les propriétés des projection orthogonales.
  - Savoir déterminer un projeté orthogonal « géométriquement ».
  - Savoir déterminer un projeté orthogonal sur $\mathbb{F}$ à l'aide d'une base orthonormale de $\mathbb{F}$.
  - Savoir identifier et résoudre un problème de meilleure approximation.

5 Exercices

Produits scalaires et normes

EXERCICE 1. Produits scalaires classiques

1. Sur $\mathbb{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'on peut définir le produit scalaire :
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A.{}^tB)$$
Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'on peut définir le produit scalaire :
$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k).Q(k)$$
3. Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, montrer qu'on peut définir le produit scalaire :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t).Q(t)\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 2. Propriétés d'une norme

On suppose que $\mathbb{E}$ est un espace préhibertien et on note $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire.

1. Vérifier les *identités de polarisation* :
$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \quad \text{et} \quad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$
2. Démontrer l'*identité du parallélogramme*, pour deux vecteurs $(x, y) \in \mathbb{E}^2$,
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

EXERCICE 3. Inégalité de cauchy-Schwarz

1. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels :
$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sqrt{n} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$
avec égalité si, et seulement si : $x_1 = \cdots = x_n$.
2. Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$:
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{b-a} \times \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}$$
avec égalité si, et seulement si : f est constante.

EXERCICE 4. Produits scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

Sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$, montrer qu'on peut définir le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$$

EXERCICE 5. Produit scalaire avec poids sur $C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$

Sur $\mathbb{E} = C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$, si ω est une fonction continue sur $[a,b]$ et strictement positive, montrer qu'on a un produit scalaire : $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t$
Remarque : la fonction ω est appelée *fonction poids*.

EXERCICE 6. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Dans l'espace $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$, on considère $(n+1)$ réels distincts $(a_0,\dots,a_n)$ et on définit :

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}$$

1. Vérifier que ϕ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Dans la suite on note $(P|Q) = \phi(P,Q)$.

2. Trouver sans calcul (ou presque) une base orthonormale de $\mathbb{E}$.
3. Quelles sont les coordonnées de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base ?

EXERCICE 7. Produit scalaire sur $C^1\big([0,1];\mathbb{R}\big)$

Soit $\mathbb{E} = C^1\big([0,1];\mathbb{R}\big)$. Pour $(f,g)\in\mathbb{E}^2$, on pose :

$$(f|g) = f(0)g(0) + \int_0^1 \big(f(t)+f'(t)\big)\big(g(t)+g'(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{E}$.

EXERCICE 8. Familles obtusangles

1. Soient $p \geq 2$ vecteurs $(x_1,\dots,x_p)$ d'un espace préhilbertien réel $\mathbb{E}$. On suppose que $\forall i \neq j$, $\left\langle x_i, x_j\right\rangle < 0$. Montrer que toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre.
   Hint : Procéder par récurrence sur p et dans une CL nulle distinguer les coefficients ≥ 0 *des coefficients* < 0.
2. En déduire que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, il est impossible de trouver $(n+2)$ vecteurs formant deux à deux un angle obtu.

Orthogonalité

EXERCICE 9. Produits scalaires classiques

Sur $\mathbb{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit scalaire :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A \times {}^tB)$$

Montrer que $\left(S_n(\mathbb{R})\right)^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 10. Propriétés de l'orthogonal

Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont deux sev d'un espace euclidien, montrer que :

$$(\mathbb{F}+\mathbb{G})^{\perp} = \mathbb{F}^{\perp} \cap \mathbb{G}^{\perp} \qquad \text{et} \qquad (\mathbb{F}\cap\mathbb{G})^{\perp} = \mathbb{F}^{\perp} + \mathbb{G}^{\perp}$$

EXERCICE 11. Caractérisation des BON

Soient $\mathbb{E}$ un espace euclidien et $\left(e_1, \dots, e_n\right)$ une famille de vecteurs *unitaires* de $\mathbb{E}$. Établir l'équivalence des propositions :

- $\left(e_1, \dots, e_n\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{E}$;
- $\forall x \in \mathbb{E},\ \left\|x\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$

EXERCICE 12. Endomorphisme dans un espace euclidien

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{E},\ \left\langle f(x), x\right\rangle = 0$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{E}^2,\ \left\langle x, f(y)\right\rangle = -\left\langle f(x), y\right\rangle$.
2. En déduire que $\mathrm{Ker}(f) = \left(\mathrm{Im}(f)\right)^{\perp}$.

EXERCICE 13. Exemple de polynômes orthogonaux

On définit

$$Q_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que Q_n possède n racines simples dans $]-1, 1[$.
2. Montrer que
$$Q_n = X^n + (X^2-1)R_n(X)$$
avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$. En déduire $Q_n(1)$ et $Q_n(-1)$.
3. On pose, pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que Q_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Calculer $\|Q_n\|^2$.

Projections orthogonales

EXERCICE 14. Projection orthogonale sur un hyperplan

Dans $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on considère un vecteur $b = (b_1, \dots, b_n)$, avec $\|b\| = 1$.
Calculer $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ où p est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}\big(b\big)^{\perp}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique. On l'exprimera à l'aide de la matrice $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(b\big)$.

EXERCICE 15. Distance à un s.e.v.

Soit $\mathbb{E} = C^0\big([-\pi, \pi]; \mathbb{R}\big)$. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\mathrm{e}^t - (a + b\sin t + c\cos t)\big)^2 \mathrm{d}t$$

soit minimale.

EXERCICE 16. Distance à un s.e.v.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Déterminer

$$\inf_{S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\left(\sum_{1 \le i, j \le n}(a_{ij} - s_{ij})^2\right)$$

EXERCICE 17. Distance à un s.e.v.

Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3}\left(\int_{-1}^{1}\big(t^3 - at^2 - bt - c\big)^2 \,\mathrm{d}t\right)$.

EXERCICE 18. Matrice d'une projection orthogonale dans une BON

Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = \big(e_1, \dots, e_n\big)$ et $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ muni d'une base orthonormée $\big(x_1, \dots, x_p\big)$.
Montrer que la matrice de $p_{\mathbb{F}}$, projecteur orthogonal sur $\mathbb{F}$, dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\sum_{k=1}^{p} X_k \times {}^tX_k$$

où X_k est la colonne des coordonnées du vecteur x_k dans $\mathscr{B}$.

EXERCICE 19. Matrice de Gram

Soit $\mathbb{E}$ un espace euclidien. Pour $(u_1,\dots,u_p)$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ on note $G(u_1,\dots,u_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice $[i,j]$ est $\langle u_i, u_j\rangle$.

1. Montrer que $(u_1,\dots,u_p)$ est libre si, et seulement si, $\det\Big(G(u_1,\dots,u_p)\Big)\neq 0$.
2. Montrer que si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base d'un sev $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$, alors, pour tout $x\in\mathbb{E}$:

$$d(x,\mathbb{F})=\sqrt{\frac{\det\Big(G(e_1,\dots,e_p,x)\Big)}{\det\Big(G(e_1,\dots,e_p)\Big)}}$$