dem th 8 :

* Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

Si A et B sont deux évènements de Ω on a :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Donc : $\mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{(Y = y_j)}(X = x_i)$

* Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

D'après le th 6 :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{(Y = y_j)}(X = x_i)$$

Cas particulier où X et Y sont à valeurs entières

ie $X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0,p]\!]$.

$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,p]\!]$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathbb{P}(Y = j) \times \mathbb{P}_{(Y = j)}(X = i)$

et $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$

$$= \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}(Y = j) \times \mathbb{P}_{(Y = j)}(X = i)$$

Exemple $X =$ "chiffre obtenu avec le dé"

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$

ie $X(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\forall n \in [\![1,6]\!]$, $\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{6}$

$Y =$ "nb de piles obtenus en lançant X fois le dé"

On a $\forall \omega \in \Omega$, $0 \leqslant Y(\omega) \leqslant X(\omega) \leqslant 6$

donc $Y(\Omega) = [\![1,6]\!]$.

⚠ On reconnait un schéma binomial mais on ne peut pas dire que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(X, \frac{1}{2})$ car X n'est pas une constante.

Par contre si $n \in [\![1,6]\!]$ alors la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k) = \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}$$

Avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ cette formule reste vraie si $k \in [\![n+1, 6]\!]$.

Donc $\forall (n,k) \in [\![1,6]\!] \times [\![0,6]\!]$, $\mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$

Donc $\forall (n,k) \in [\![1,6]\!] \times [\![0,6]\!]$, $\mathbb{P}((X=n) \cap (Y=k)) = \mathbb{P}(X=n) \times \mathbb{P}_{(X=n)}(Y=k)$

$$= \frac{1}{6} \times \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}$$

Donc pour tout $k \in [\![0,6]\!]$: $\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=1}^{6} \mathbb{P}((X=n) \cap (Y=k))$

donc $\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=1}^{6} \underbrace{\frac{1}{6} \times \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}}_{=0 \text{ si } n<k}$

Avec la calculatrice on obtient :

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{63}{384}$	$\frac{120}{384}$	$\frac{99}{384}$	$\frac{64}{384}$	$\frac{29}{384}$	$\frac{8}{384}$	$\frac{1}{384}$