dem th 6 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ V.A.R.

On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$

avec $x_1 < \dots < x_n$ et $y_1 < \dots < y_p$.

D'après le th 2 du chap 18 on sait que la famille $((Y=y_1), \dots, (Y=y_p))$ est un sce. Donc d'après la formule des probabilités totales on a pour tout évènement A de Ω :

$$P(A) = \sum_{j=1}^{p} P(A \cap (Y=y_j))$$

En particulier :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \ P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{p} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

De même on montre que :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \ P(Y=y_j) = \sum_{i=1}^{n} P((X=x_i) \cap (Y=y_j))$$

Cas particulier si X et Y sont à valeurs entières

ie $X(\Omega) \subseteq [\![0,n]\!]$ et $Y(\Omega) \subseteq [\![0,p]\!]$.

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \ P(X=i) = \sum_{j=0}^{p} P((X=i) \cap (Y=j))$$

$$\text{et } \forall j \in [\![0,p]\!], \ P(Y=j) = \sum_{i=0}^{n} P((X=i) \cap (Y=j))$$

Exemple 4 (X,Y) couple de VAR tq $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$

et $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))=\frac{i+j}{n^2(n+1)}$

On a donc :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(X=i)=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}((X=i)\cap(Y=j))$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n^2(n+1)}\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

$$=\frac{1}{n^2(n+1)}\times\left(ni+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{i}{n(n+1)}+\frac{1}{2n}$$

Par symétrie on trouve :

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Y=j)=\frac{j}{n(n+1)}+\frac{1}{2n}$$

X et Y ont la même loi