Lemme des coalitions

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Soient $p \in [\![1, n]\!]$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications.

Alors les variables aléatoires $Y = f(X_1, \ldots, X_p)$ et $Z = g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

<u>dem cor 18</u> Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

"si $X_1, \dots, X_n$ sont iid de loi $\mathcal{B}(p)$ alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)"$$

<u>Pour $n=1$</u> Soit X_1 de loi $\mathcal{B}(p)$

Alors $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ car $X_1(\Omega) = \{0;1\}$

et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^0$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1-p = \binom{1}{0} p^0 (1-p)^1$

Donc H_1 est vrai.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose H_n vrai.

Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ iid de loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{n+1} X_k$. On veut montrer que

$$S \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p).$$

On pose aussi $T = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On a $S = T + X_{n+1}$

D'après H_n on sait que $T \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

De plus d'après le lemme des coalitions : T et X_{n+1} sont indépendantes.

Comme $T \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$

alors d'après le th 12 :

$$S = T + X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{B}(n+1, p).$$

Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence, H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

<u>Interprétation :</u> On répète n fois de manières indépendantes une expérience qui donne un succès avec probabilité p.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on pose :

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la } k\text{-ième répétition est un succès} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$. C'est une somme de n termes qui valent 0 ou 1.

Alors $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$

De plus :

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$=$ nombres de termes qui valent 1

$=$ nombres de succès

Donc $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

dem th 19

1. D'après la généralisation du th de transfert vue dans le th 13 appliquée au couple de VAR (X_1, X_2) et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x+y$

on a :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \left(\sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} (x_1 + x_2) . \mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)\big) \right)$$

$$= \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \left[x_1 . \overbrace{\sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)\big)}^{= \mathbb{P}(X_1 = x_1)} + \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} x_2 . \mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)\big) \right]$$

$$= \overbrace{\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} x_1 \times \mathbb{P}(X_1 = x_1)}^{= \mathbb{E}(X_1)} + \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} x_2 . \mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)\big)$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E}(X_1) + \underbrace{\sum_{x_2 \in X_2(\Omega)} x_2 \Bigg(\underbrace{\sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}\big((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)\big)}_{= \mathbb{P}(X_2 = x_2)} \Bigg)}_{= \mathbb{E}(X_2)}$$

$$= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$$

Par récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat

"si $X_1, \dots, X_n$ sont des VA mutuellement indépendantes

alors $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$"

Pour $n=1$ si X_1 est une VA on a $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1)$

Donc H_1 est vrai.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel H_n est vrai.

Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ VA mutuellement indépendantes.

On pose $Y = \prod_{k=1}^{n+1} X_k$ et $Z = \prod_{k=1}^{n} X_k$

On a $Y = Z \times X_{n+1}$

De plus d'après le lemme des coalitions : $Z \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$

donc d'après le th 13 : $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) \times \mathbb{E}(X_{n+1})$

Mais d'après H_n on a $\mathbb{E}(Z) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$

donc $\mathbb{E}(Y) = \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k)$

Donc H_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence : H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Application Si $X_1, \dots, X_n$ ~~sont~~ iid de loi $\mathcal{B}(p)$

et si $S \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} X_k$ on a vu que $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ [ex18]

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np.$$

c'est vrai pour toute VA de loi $\mathcal{B}(n,p)$.