Chapitre 22

Couples de variables aléatoires

Sommaire

Dans tout le chapitre, on considère une expérience aléatoire modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

1 Couples de variables aléatoires

1.1 Couples de variables aléatoires

On se donne $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

Définition 1 – Couple de variables aléatoires

On appelle *couple des variables aléatoires X et Y*, et on note $Z = (X, Y)$, l'application

$$\begin{array}{rccl} Z : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \longmapsto & Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

L'ensemble des valeurs prises par Z est :

$$Z(\Omega) = \Big\{ \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \,;\, \omega \in \Omega \Big\}$$

C'est une partie de $\mathbb{R}^2$, incluse dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

__Notation :__ Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ alors :

$$Z(\Omega) \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega) = \big\{(x_i, y_j) \,;\, (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]\big\}$$

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés cubiques distinguables. On note X = Chiffre obtenu avec le premier dé, et Y = Chiffre obtenu avec le second dé. Alors $Z = (X, Y)$ est un couple discret et $Z(\Omega) = [\![1, 6]\!]^2$.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés cubiques distinguables. On note X = Chiffre obtenu avec le premier dé, et Y = Plus grand chiffre obtenu avec les deux dés. Alors $Z = (X, Y)$ est un couple discret et $Z(\Omega) \subsetneq [\![1, 6]\!]^2$.

Plus généralement, on dira que $(X_1, \dots, X_n)$ est une *suite finie de variables aléatoires* définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ lorsque, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, X_k est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

1.2 Évènements associés à un couple de VA

Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$, on note $(Z \in A)$ ou $Z \in A$ l'évènement :

$$Z^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \,;\, Z(\omega) \in A\}$$

Si $A = B \times C$ où B et C sont deux parties de $\mathbb{R}$, on a :

$$(Z \in B \times C) = (X \in B) \cap (Y \in C)$$

En particulier si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big(Z = (x, y)\big) = (X = x) \cap (Y = y)$.

Notation : Pour simplifier on pose :

$$\mathbb{P}(X \in B, Y \in C) = \mathbb{P}\big((X \in B) \cap (Y \in C)\big) \text{ et } \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

Théorème 2 – S.c.e. associé à un couple discret

Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ alors la famille d'évènements $\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est un s.c.e. de Ω

1.3 Loi conjointe d'une couple de VA

Définition 3 – Loi conjointe d'une couple de VA

Si (X, Y) est un couple de VA, on appelle loi conjointe l'application

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x, Y = y) \end{array}$$

⚠ Si $(x, y) \notin X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = 0$. Donc avant de déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), on commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_q\}$, on pose :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!], \quad p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Puisque la famille $\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]}$ est un s.c.e., le théorème de Fubini donne :

$$1 = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{q} p_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right)$$

Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) c'est calculer la valeur des p_{ij}. On peut représenter les résultats sous forme d'un tableau à double entrée :

X \ Y	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1q}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{iq}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nq}

La somme de toutes les cases doit être égale à 1.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne composée de 3 boules numérotées. On tire deux boules successivement, avec remise. On note X_1 = Numéro de la première boule tirée, et X_2 = Numéro de la seconde boule tirée. Alors $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et la loi conjointe de (X_1, X_2) est :

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

De même si $Y = \max(X_1, X_2)$ alors $Y(\Omega) = [\![1,3]\!]$ et la loi conjointe de (X_1, Y) est :

$X_1 \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	0	0	$\frac{3}{9}$

✎ ***Exemple.*** Si X et Y sont deux VA à valeurs entières positives, la loi conjointe de (X, Y) permet de déterminer la loi de la VA $S = X + Y$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = n-k, Y = k)$$

Théorème 4 – Construction d'un couple discret finie ayant une loi conjointe donnée

On se donne des réels $(p_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ vérifiants :

- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $p_{ij} \geq 0$;
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{q} p_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right) = 1.$

Alors pour tous réels deux à deux distincts $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_p$, il existe un couple discret (X, Y) défini sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\},\ Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}, \text{ et } \forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Donc pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $p_{ij} \in [0, 1]$.

✎ ***Exemple.*** Il existe un couple discret (X, Y) à valeurs dans $[\![1, n]\!]^2$ et de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i + j}{n^2(n+1)}$$

1.4 Lois marginales

Définition 5 – Lois marginale

Si (X,Y) est un couple de VA, on appelle *loi marginales* de (X,Y) les lois de X et de Y.

Théorème 6 – La loi conjointe caractérise les lois marginales

Si (X,Y) est un couple de VA avec $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1,\dots,y_p\}$, alors :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad \mathbb{P}(X=x_i)=\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{p}p_{ij}$$

et :

$$\forall j\in[\![1,p]\!],\quad \mathbb{P}(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$$

On note parfois $p_{i.}=\mathbb{P}(X=x_i)$ et $p_{.j}=\mathbb{P}(Y=y_j)$. On a donc les formules :

$$p_{i.}=\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{p}p_{ij}\quad\text{et}\quad p_{.j}=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}$$

On peut ajouter une ligne et une colonne au tableau à double entrée représentant la loi conjointe. Pour trouver les loi marginales, il suffit ensuite d'additionner les cases en ligne et en colonne.

✎ ***Exemple.*** Sur les deux tableaux précédents, on obtient :

X_1 \ X_2	1	2	3	Loi de X_1
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
Loi de X_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

X_1 \ Y	1	2	3	Loi de X_1
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$
Loi de Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	1

On retrouve que $X_1\hookrightarrow\mathscr{U}(\{1,2,3\})$ et $X_2\hookrightarrow\mathscr{U}(\{1,2,3\})$. Par contre, pour $Y=\max(X_1,X_2)$, on ne trouve pas une loi usuelle.

⚠ Le théorème précédent n'est pas une équivalence : les lois marginales ne caractérisent pas la loi conjointe.

Intuitivement, les lois marginales donnent des information sur le comportement de chacune des variables aléatoires, mais elles ne donnent aucune information que la manière dont les deux variables aléatoires interagissent au cours de l'expérience.

Comme contre-exemple, nous allons construire deux couples de VA qui ont les mêmes lois marginales mais des lois conjointes différentes.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches et 4 boules rouges. On effectue deux tirages successifs d'une boule dans cette urne. On note :

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est rouge} \end{cases}$$

et :

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la seconde boule tirée est blanche} \\ 0 & \text{si la seconde boule tirée est rouge} \end{cases}$$

On obtient les lois conjointes et marginale suivantes :

TIRAGES AVEC REMISE

X_1 \ X_2	0	1	Loi de X_1
0	$\frac{16}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{12}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{3}{7}$
Loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

TIRAGES SANS REMISE

X_1 \ X_2	0	1	Loi de X_1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
Loi de X_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

1.5 Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de VA.

Définition 7 – Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$.
On appelle *loi conditionnelle de Y sachant* $(X = x)$, l'application

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ y & \longmapsto & \mathbb{P}_{X=x}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = y | X = x) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)} \end{array}$$

On la note parfois $\mathbb{P}_Y(.|X = x)$.

Si $y \in Y(\Omega)$ est tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$, on définit de même la *loi conditionnelle de X sachant* $(Y = y)$

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}_{Y=y}(X = x) = \mathbb{P}(X = x | Y = y) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \end{array}$$

Les lois conditionnelles sont souvent données dans la modélisation.

Avec les notations $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ on a le théorème suivant.

Théorème 8 – Lois conditionnelles + loi marginale donnent la loi conjointe

Si on connaît la loi de Y, ainsi que la loi de X sachant $(Y = y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$, on peut en déduire la loi conjointe de (X, Y) :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$$

et donc la loi de X :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(Y = y_j) \times \mathbb{P}_{Y=y_j}(X = x_i)$$

De même, si on connaît la loi de X et les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$, alors on peut calculer la loi conjointe du couple (X, Y) puis la loi de Y.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'un dé et d'une pièce. On lance une fois le dé et on note X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. On lance alors X fois la pièce et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de « pile » obtenus. Déterminer la loi de Y.

2 Indépendance de variables aléatoires

2.1 Indépendance de deux VA

Soit (X, Y) un couple de VA.

Définition 9 – Indépendance de deux VA

On dit que les VA X et Y sont *indépendantes*, lorsque :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$$

On le note $X \perp\!\!\!\perp Y$ mais cette notion n'est pour le moment pas officielle aux concours.

On a donc :

$$\underbrace{X \perp\!\!\!\perp Y}_{\text{VA}} \iff \left(\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \underbrace{[X = x] \perp\!\!\!\perp [Y = y]}_{\text{événements}}\right)$$

Important. Si X et Y sont indépendantes, les lois marginales déterminent donc la loi conjointe (on a vu que ce résultat est faux en général).

⚠ En pratique, l'indépendance de deux VA n'est en général pas démontrée. Elle fait partie des hypothèses de l'énoncé.

✎ ***Exemple.*** On lance deux dés distinguables et on note X = chiffre donné par le premier dé, et Y = chiffre donné par le second. Alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

✎ ***Exemple.*** X est une VA constante si, et seulement si, $X \perp\!\!\!\perp X$.

Pour le théorème suivant rappelons que, si A est un évènement, alors $\mathbb{1}_A$ est une VA de loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Théorème 10 – Lien entre indépendance d'évènements et indépendance de VA

Soient A et B deux évènements. Alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont des évènements indépendants} \Longleftrightarrow \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_B \text{ sont des VA indépendantes}$$

A partir de deux VA indépendantes, on peut en construire d'autres.

Théorème 11 – Indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

L'indépendance est une hypothèse très utile pour étudier la somme de deux VA.

✎ ***Exemple.*** Si X et Y sont deux VAR indépendantes et à valeurs entières positives et si $S = X + Y$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(S = n) = \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = n - k)$$

Donc dans le cas où X et Y sont indépendantes, la loi de $X + Y$ est déterminée par les lois marginales de X et de Y.

Théorème 12 – Stabilité de la loi binomiale

Si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_2, p)$, avec $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$.

On a aussi le résultat remarquable suivant.

Théorème 13 – Indépendance et espérance

Si X et Y sont deux VA indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$.

⚠ Ne pas confondre avec la linéarité de l'espérance qui est vraie même si les VA ne sont pas indépendantes : $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

⚠ La réciproque est fausse, on peut avoir $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$ avec X et Y non indépendantes.

à valeurs entières

✎ ***Exemple.*** Si X est une VA on appelle fonction génératrice de X l'application $G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$. Si X et Y sont deux VA indépendantes, montrer que $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

✎ ***Exemple.*** Il existe un cas où la réciproque est vraie, et cela fait partie des résultats classiques en probabilités : lorsque X et Y sont des lois de Bernoulli. On a alors :

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Longleftrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

2.2 Indépendance d'une suite finie de VA

On se donne $(X_1, \dots, X_n)$ une suite finie de VA.

Définition 14 – Indépendance deux à deux de VA

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont *deux à deux indépendantes* lorsque, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, on a $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, ie lorsque $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$:

$$i \neq j \Longrightarrow \Big[\forall (x_i, x_j) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega), \quad \mathbb{P}(X_i = x_i, X_j = x_j) = \mathbb{P}(X_i = x_i) \times \mathbb{P}(X_j = x_j)\Big]$$

Définition 15 – Indépendance mutuelle de VA

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont *mutuellement indépendantes*, ou *indépendantes dans leur ensemble*, lorsque $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

On a donc lorsque X_1, X_2, ..., X_n sont mutuellement indépendantes :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = x_k)$$

Proposition 16 – Lien entre VA et évènements mutuellement indépendants

Si les variables aléatoires X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes alors pour tout $(A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathscr{P}\big(X_1(\Omega)\big) \times \mathscr{P}\big(X_2(\Omega)\big) \times \cdots \times \mathscr{P}\big(X_n(\Omega)\big)$, les évènements $(X_1 \in A_1)$, $(X_2 \in A_2)$, ..., $(X_n \in A_n)$ sont mutuellement indépendants.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de N boules numérotées, dans laquelle on effectue n tirages successifs d'une boule avec remise. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note X_k = numéro inscrit sur la boule tirée au k-ième tirage.
Alors $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Théorème 17 – Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux

Si $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes.

⚠ La réciproque est fausse (comme dans le cas des évènements).

Notation : On dit que les VA X_1, ..., X_n sont i.i.d. lorsqu'elles sont *mutuellement indépendantes et identiquement distribuées*. En pratique, ceci correspond au cas d'une expérience répétée de manière identique et indépendante à chaque fois.

✎ ***Exemple.*** Dans l'exemple précédent, $(X_1,\dots,X_n)$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{U}\big([\![1,N]\!]\big)$.

⚠ En pratique, l'indépendance mutuelle n'est en général pas démontrée. Elle fait partie des hypothèses de l'énoncé.

✎ ***Exemple.*** On dispose d'une urne de 20 boules, dont 15 blanches et 5 noires. On effectue 12 tirages successifs d'une boule avec remise. On note Y = nombre de boules blanches obtenues au 7 premiers tirages, et Z = nombre de boules noires obtenues entre le 8-ième tirage et le 12-ième. Alors $Y \perp\!\!\!\perp Z$.
Par contre si Z = nombre de boules noires obtenues entre le 7-ième tirage et le 12-ième. Alors Y et Z ne sont, à priori, pas indépendantes.

La stabilité de la loi binomiale donne le résultat suivant, souvent utilisé dans l'étude du jeu de pile ou face.

Corollaire 18 – Somme de VARD i.i.d. de loi de Bernoulli

Supposons que $(X_1,\dots,X_n)$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$. Alors $X_1+X_2+\cdots+X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Intuitivement, on peut comprendre ce résultat de la manière suivante.

On répète n fois une même expérience aléatoire du type succès/échec, de manière indépendante. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $X_k = 1$ si la k-ième répétition est un succès, et 0 sinon.

Alors $X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ où p est la probabilité qu'une réalisation de l'expérience donne un succès, et $X_1+\cdots+X_n$ représente le nombre de succès obtenu sur n répétitions, et suit donc la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

On retrouve ainsi le résultat du théorème précédent.

⚠ Ce résultat est faux sans l'hypothèse d'indépendance mutuelle.

On peut aussi généraliser le résultat suivant.

Théorème 19 – Espérance d'un produit et d'une somme de VA

On se donne une suite finie de variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$.

1. On a linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$
2. Si on suppose de plus que les variables aléatoires $(X_1,\dots,X_n)$ sont mutuellement indépendantes : $\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)$

Avec la linéarité de l'espérance, on retrouve que l'espérance de la loi binomiale est np.

⚠ Le second point nécessite l'hypothèse d'indépendance mutuelle des VA, mais pas le premier.

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Connaître les notions de loi conjointe, lois marginales et lois conditionnelles pour une couple de VA.

- ✪ Par somme de valeurs de la loi conjointe on peut déterminer les valeurs des lois marginales.
- ✪ Les valeurs de la loi conjointe peuvent être obtenues par produit des valeurs des lois marginales et des valeurs des lois conditionelles.

➥ Connaître la notion d'indépendance d'un couple de VA.

- ✪ Dans ce cas les valeurs de la loi conjointe sont obtenues par produit des valeurs des lois marginales.

➥ Connaître les règles de calculs pour le produit scalaire et la norme.

- ✪ Savoir démontrer des inégalités grâce à l'inégalité triangulaire ou l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

➥ Savoir déterminer la loi d'une somme de VA.

➥ Connaître les propriétés de l'espérance.

- ✪ Pour l'espérance d'une somme de VA on utilise la linéarité de l'espérance, sans aucune condition.
- ✪ Pour l'espérance un produit de VA, on obtient le produit des espérances à condition que les VA soient mutuellement indépendantes.

4 Exercices

Lois conjointes, lois marginales et lois conditionnelles

EXERCICE 1. Utilisation des conditionnelles

On lance un dé et on note X le numéro obtenu. On choisit alors au hasard avec équiprobabilité un entier Y entre 1 et X.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X sachant $[Y = 2]$.

EXERCICE 2. Min et Max pour un tirage simultané

On considère une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N. On tire simultanément n jetons de l'urne ($n < N$) et on note X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

EXERCICE 3. Utilisation des lois conditionnelles

On dispose de $n \in \mathbb{N}^*$ urnes numérotées de 1 à n : U_1, U_2, $\dots$, U_n. L'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une urne, on note X le numéro de l'urne choisie, puis on tire une boule au hasard dans l'urne choisie, on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y), en déduire la loi de Y.
2. Déterminer l'espérance de Y.

EXERCICE 4. Utilisation des lois conditionnelles

On dispose d'une urne contenant $n \geq 2$ boules numérotées de 1 à n. Soit Y une variable uniforme à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Lorsque Y prend la valeur y, on tire au hasard y boules simultanément dans l'urne. On appelle X la somme des numéros tirés. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire définie par $X_k = k$ si la boule numéro k a été tirée et $X_k = 0$ sinon.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = k) = \dfrac{1}{2}$. En déduire la loi de X_k.
3. Justifier que $X = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, en déduire l'espérance de X.

Indépendance de variables aléatoires

EXERCICE 5. Contre-exemple à la réciproque de $X \perp\!\!\!\perp Y \Longrightarrow \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$

Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $T = U_1 - U_2$ et $V = U_1 + U_2$.

1. Déterminer la loi du couple (T, V).
2. Vérifier que $\mathbb{E}(TV) = \mathbb{E}(T) \times \mathbb{E}(V)$.
3. T et V sont-elles indépendantes ?

EXERCICE 6. Lois uniformes indépendantes

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$ et de $V = \max(X, Y)$. Calculer leur espérance.

Sujets d'étude

EXERCICE 7. Urne à composition changeante

Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches. On pose $N = r + b$. On effectue des tirages successifs dans l'urne, et, à l'issue de chaque tirage, la boule prélevée est remise, avec c boules de la même couleur ($c \in \mathbb{N}^*$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges tirées lors des n premiers tirages et Y_n la variable indicatrice de l'évènement « le n-ième tirage donne une boule rouge ».

1. Déterminer la loi de Y_1.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \dfrac{r + c\mathbb{E}(X_n)}{N + nc}$.
3. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ et en déduire que toutes les variables Y_n ont même loi.
4. Déterminer l'espérance de X_n.

EXERCICE 8. Urnes d'Ehrenfest

On considère deux urnes A et B contenant en tout b boules ($b \geq 2$). Lors de chaque étape, une boule est sélectionnée au hasard et changée d'urne. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules dans l'urne A à l'instant n.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = 1 - \dfrac{1}{b}\mathbb{E}(X_n)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : \mathbb{E}(X_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{2}{b}\right) \times \mathbb{E}(X_n) + 1$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de la composition initiale des deux urnes, puis sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$.

EXERCICE 9. Sur le jeu infini de pile ou face

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point. Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois, les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n? Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.
3. Soit $n \geq 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)$$
4. Soit $n \geq 2$. On définit une fonction $Q_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $Q_n(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k) \times s^k$.
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q'_n(1) = \mathbb{E}(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R} : Q_{n+1}(s) = \dfrac{1+s}{2}Q_n(s)$.
   (c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.
   (d) Calculer alors , pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.
   (e) Pour $n \geq 2$ donner la loi de X_n.

EXERCICE 10. Sur les marches aléatoires

Soit X une variable aléatoire discrète finie à valeurs dans $\mathbb{Z}$, non constante. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer l'existence de $c_1 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_1}{\sqrt{n}} \leq \sup\left\{\mathbb{P}(S_n = k); k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right)^n e^{-ikt}\,dt$
3. Montrer l'existence de $C_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\left\{\mathbb{P}(S_n = k); k \in \mathbb{Z}\right\} \leq \dfrac{c_2}{\sqrt{n}}$

EXERCICE 11. Variables aléatoires constantes

Soit X une variable aléatoire discrète finie à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X. On suppose $X_1 + X_2$ a même loi que $2X$. Montrer que X est presque sûrement constante.

EXERCICE 12. Marches aléatoires et principe de réflexion

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On appelle chemin de longueur n allant de a à b toute suite d'entiers $\gamma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ commençant par $a_0 = a$, terminant par $a_n = b$ et vérifiant $|a_i - a_{i-1}| = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On dit alors que ce chemin passe par les a_i et celui-ci peut être fiuré par une ligne brisée s'articulant autour des points de coordonnées (i, a_i) pour $i = 0, 1, \dots, n$.

1. À quelle condition existe-t-il au moins un chemin de longueur n allant de a à b? On suppose cette condition remplie, exprimer alors le nombre de ces chemins.
2. Soient $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Justifier qu'il y a autant de chemins de longueur n allant de a à b qui passe par 0 que de chemins de longueur n allant de $-a$ à b.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées selon la loi d'une variable X prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X = 1) = p$ (avec $p \in]0, 1[$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{Z}$. Exprimer $\mathbb{P}(S_n = b)$ et vérifier que :

$$\mathbb{P}(S_1 S_2 \dots S_n \neq 0, S_n = b) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}(S_n = b)$$

4. En déduire :

$$\mathbb{P}(S_1 S_2 \dots S_n \neq 0) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(|S_n|)$$