Chapitre 3

Nombres complexes

Sommaire

1 Propriétés des nombres complexes

1.1 Construction rapide de $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On va donc construire un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, et dans lequel cette équation a des solutions.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit des opérations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \text{ et } (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

De plus on identifie $a \in \mathbb{R}$ avec $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$: $a = (a, 0)$.
Si on pose $i = (0,1)$, alors on a $i^2 = (-1,0) = -1$. On a donc donné une solution à l'équation $x^2 = -1$. On pose :

$$\mathbb{C} = \left\{z = (a,b);\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

De plus on remarque que si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a + ib = (a,0) + (0,1) \times (b,0) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$, donc :

$$\mathbb{C} = \left\{z = a + ib;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On a $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et on peut démontrer que les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés *nombres complexes*, ceux de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sont appelés *nombres complexes purs*, et ceux de $i\mathbb{R} = \left\{ib;\ b \in \mathbb{R}\right\}$ *nombres complexes imaginaires purs.*

Théorème 1 – Identités remarquables

Pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2. $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$ et $a^2 + b^2 = (a+ib) \times (a-ib)$
3. **Formule du binôme.**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{et} \qquad (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a^k b^{n-k}$$

4. **Formule de Bernoulli .**

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Si n est impair on a $b^n = \left(-(-b)\right)^n = (-1)^n(-b)^n = -(-b)^n$ donc :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k}$$

1.2 Notions de base

Définition 2 – Parties réelles et imaginaires

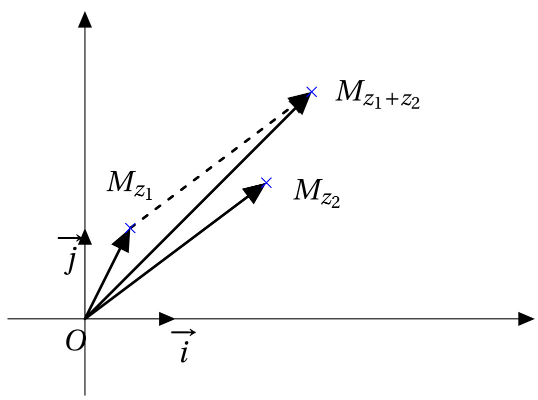
Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le choix des réels a et b est unique.
Le réel a est appelé partie réelle de z, notée $\mathrm{Re}(z)$.
Le réel b est appelée partie imaginaire de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

On a donc $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Géométriquement, un nombre complexe z est représenté dans le plan par le point M_z de coordonnées $\left(\mathrm{Re}(z)), \mathrm{Im}(z)\right)$. On dit alors que M_z est le point d'*affixe* z. De même, si $\overrightarrow{v} = (a, b)$ est un vecteur du plan, on dit que $\overrightarrow{v}$ est d'*affixe* $z = a + ib$.

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors le nombre complexe $z_1 + z_2$ est réprésenté par le point $M_{z_1+z_2}$ défini par :

$$\overrightarrow{OM_{z_1+z_2}} = \overrightarrow{OM_{z_1}} + \overrightarrow{OM_{z_2}}$$



Proposition 3 – Règles de calcul

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$
   Plus généralement : $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}(z_k)$ et $\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}(z_k)$.
2. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \\ \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \end{cases}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Re}(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathrm{Re}(z_1)$ et $\mathrm{Im}(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathrm{Im}(z_1)$.
4. $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$
   et $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Re}(z_2)\,\mathrm{Im}(z_1)$.
5. $z_1 \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z_1) = 0$ et $z_1 \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z_1) = 0$.
6. Si $z_1 \neq 0$: $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = \dfrac{\mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2}$ et $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = -\dfrac{\mathrm{Im}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2}$.

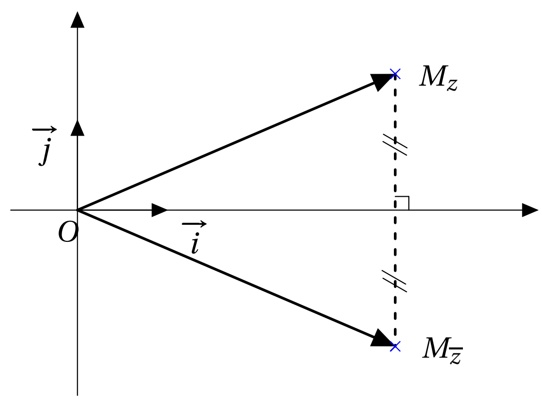
⚠ Par contre : $\mathrm{Re}(z_1 \times z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1) \times \mathrm{Re}(z_2)$ et $\mathrm{Im}(z_1 \times z_2) \neq \mathrm{Im}(z_1) \times \mathrm{Im}(z_2)$
Et si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\mathrm{Re}(\lambda \times z_1) \neq \lambda \times \mathrm{Re}(z_1)$ et $\mathrm{Im}(\lambda \times z_1) \neq \lambda \times \mathrm{Im}(z_1)$.

✎ ***Exemple.*** Si $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$ et $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

Définition 4 – Conjugué

Si $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$
On a donc : $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$

Géométriquement le point $M_{\overline{z}}$ est le symétrique orthogonal du point M_z par rapport à l'axe des abscisses :



Proposition 5 – Règles de calcul

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
2. $\mathrm{Re}(z_1) = \dfrac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1})$ et $\mathrm{Im}(z_1) = \dfrac{1}{2i}(z_1 - \overline{z_1})$
3. $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$ et $z_1 \in i\mathbb{R} \iff z_1 = -\overline{z_1}$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

   Plus généralement : $\overline{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} z_k} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$

   De plus : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$ et si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$
5. $z_1 \times \overline{z_1} = \mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2 \in \mathbb{R}^+$

Définition 6 – Module

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\quad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$

Graphiquement, le module de z est égal à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_z}$, ie à la longueur OM_Z.

Proposition 7 – Règles de calcul

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Dans $\mathbb{R}$, valeur absolue et module coïncident.
2. $\left|\mathrm{Im}(z_1)\right| \leq |z_1| \quad$ et $\quad \left|\mathrm{Re}(z_1)\right| \leq |z_1|$
3. $\left|\overline{z_1}\right| = |z_1| = |-z_1|$
4. $|z_1| \geq 0$ et $|z_1| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$
   De plus : $z_1 = |z_1| \Longleftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}^+$
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda z_1| = \lambda |z_1|$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|z_1^n\right| = |z_1|^n$
6. Si $z_2 \neq 0$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

⚠ En général $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par contre il faut connaître le calcul suivant :

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

✎ ***Exemple.*** Déterminer parties réelle et imaginaire de $\dfrac{1}{2+i}$.

✎ ***Exemple.*** Si $z \in \mathbb{C}$ déterminer les parties réelles et imaginaire de $1 + iz$, ainsi que son module.

✎ ***Exemple.*** Si $|z| = 1$, que dire de $\overline{z}$?

On aussi l'encadrement suivant, fondamental en analyse.

Théorème 8 – Inégalité triangulaire

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

Puisque $|-z| = |z|$ on a aussi $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, $z_2 - z_1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_{z_1}M_{z_2}}$, donc $|z_2 - z_1|$ est la longeur $M_{z_1}M_{z_2}$.

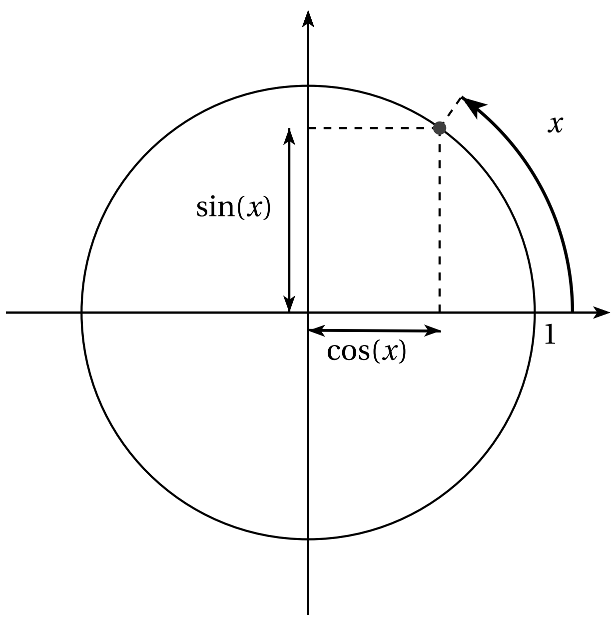
Le *cercle* de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r > 0$ est donc $\{z \in \mathbb{C};\, |z-\omega| = r\}$.

Le *disque ouvert* de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r > 0$ est $\{z \in \mathbb{C};\, |z-\omega| < r\}$.

Le *disque fermé* de centre Ω d'affixe ω et de rayon $r > 0$ est $\{z \in \mathbb{C};\, |z-\omega| \leq r\}$.

1.3 Rappels et compléments de trigonométrie

Les fonctions cos et sin sont définies géométriquement : si $x \in \mathbb{R}$ est la longueur algébrique d'un arc de cercle sur le *cercle trigonométrique* (qui est le cercle de centre O d'affixe 0 et de rayon 1) alors le point obtenu a pour affixe $\cos(x) + i\sin(x)$.



Proposition 9 – Propriétés de symétrie

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$
   $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

Proposition 10 – Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Pour retrouver ces valeurs ont peut se rappeler que :

$$0=\sqrt{\frac{0}{4}}\qquad \frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}}\qquad \frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{4}}\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}}\qquad \text{et}\qquad 1=\sqrt{\frac{4}{4}}$$

Proposition 11 – Formules de bases

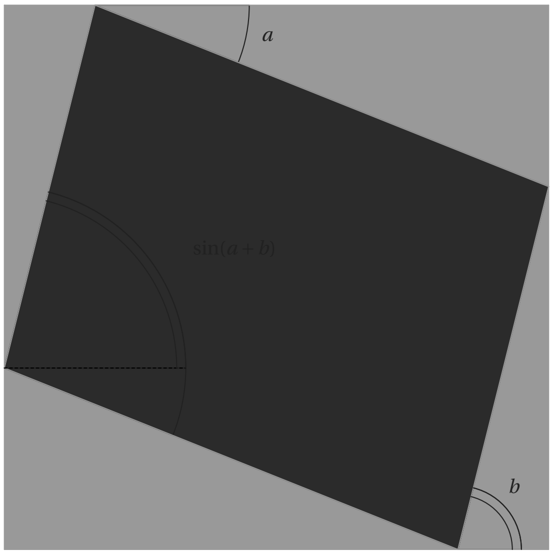
1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin^2(x)+\cos^2(x)=1$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$
   $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$
3. $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(x+\pi)=-\sin(x)$ et $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
   $\sin(\pi-x)=\sin(x)$ et $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$

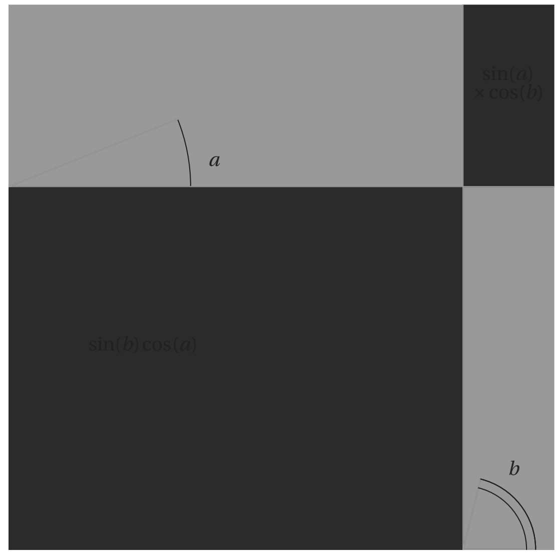
Toutes ces formules se retrouvent aisément à l'aide du cercle trigonométrique !

Proposition 12 – Formules fondamentales

1. $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(a+b)=\cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$
   $\cos(a-b)=\cos(a)\times\cos(b)+\sin(a)\times\sin(b)$
   $\sin(a+b)=\sin(a)\times\cos(b)+\sin(b)\times\cos(a)$
   $\sin(a-b)=\sin(a)\times\cos(b)-\sin(b)\times\cos(a)$
2. $\forall a\in\mathbb{R},\quad \cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
   $\sin(2a)=2\sin(a)\times\cos(a)$
   donc $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Ces formules se démontrent géométriquement. Par exemple la formule d'addition pour le sinus se démontre à l'aide des figures suivantes, où les triangles sont tous d'hypothénuse de longueur égale à 1 : l'aire du quadrilatère à gauche est égale à la somme des aires des deux rectangles à droite.





Proposition 13 – Formules de transformation

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\qquad \begin{aligned} \cos(a)\times\cos(b) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)\\ \sin(a)\times\sin(b) &= \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)\\ \sin(a)\times\cos(b) &= \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)\end{aligned}$$

A l'aide des formules $\left\{\begin{array}{l} p=a+b\\ q=a-b\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=(p+q)/2\\ b=(p-q)/2\end{array}\right.$, on obtient pour tout $(p,q)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)-\sin(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

On définit la fonction *tangente* par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et on pose $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Proposition 14 – Fonction tangente

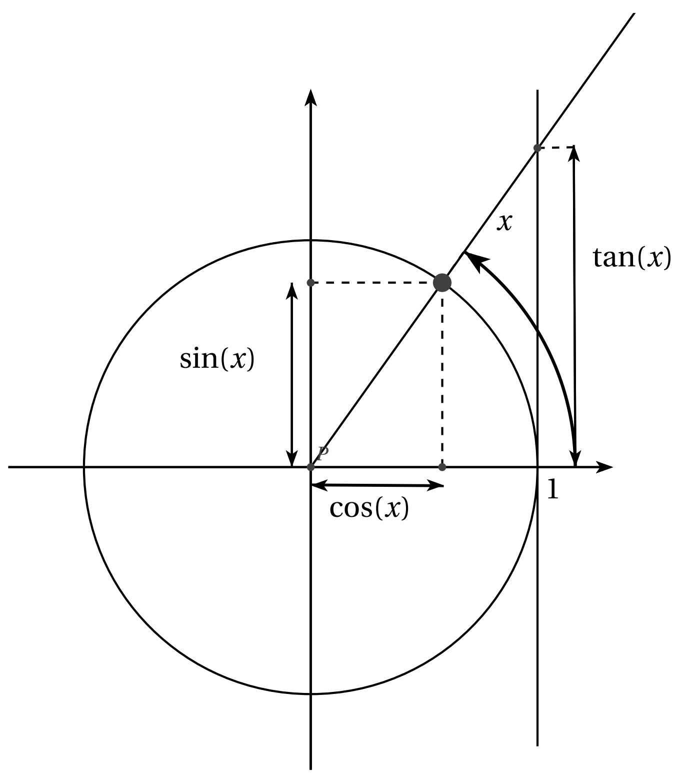
1. $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} ; x \neq \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]\right\} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$
2.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \tan(x + k\pi) = \tan(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$
4. Si $a, b, a+b \in \mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \times \tan(b)}$

   si $a, b, a-b \in \mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \times \tan(b)}$

Elle peut s'interpréter géométriquement :



On rappelle que $a = b\ [\pi]$ lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\pi$. On le lit « $a = b$ modulo π ».

On défnit de même $[2\pi]$, $[\pi/2]$ ...

Autre notation : si $a \in \mathbb{R}$, on note $a\mathbb{Z} = \{ak;\ k \in \mathbb{Z}\}$ et on a alors : $a = b\ [\pi] \iff a - b \in \pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 15 – Équations trigonométriques

1. On a :
$$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x - \frac{\pi}{2} \in \pi\mathbb{Z}$$
et :
$$\begin{aligned}\cos(x) = \cos(y) &\iff x = y\ [2\pi] \text{ ou } x = -y\ [2\pi]\\ &\iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x + y \in 2\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$
2. On a :
$$\sin(x) = 0 \iff x = 0\ [\pi] \iff x \in \pi\mathbb{Z}$$
et :
$$\begin{aligned}\sin(x) = \sin(y) &\iff x = y\ [2\pi] \text{ ou } x = \pi - y\ [2\pi]\\ &\iff x - y \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x + y - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}\end{aligned}$$
3. On a :
$$\tan(x) = 0 \iff x = 0\ [\pi] \iff x \in \pi\mathbb{Z}$$
et :
$$\tan(x) = \tan(y) \iff x = y\ [\pi] \iff x - y \in \pi\mathbb{Z}$$

✎ ***Exemple.*** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = \sin(2x)$

Pour résoudre des inéquations, on s'aide du cercle trigonométrique.

✎ ***Exemple.*** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$

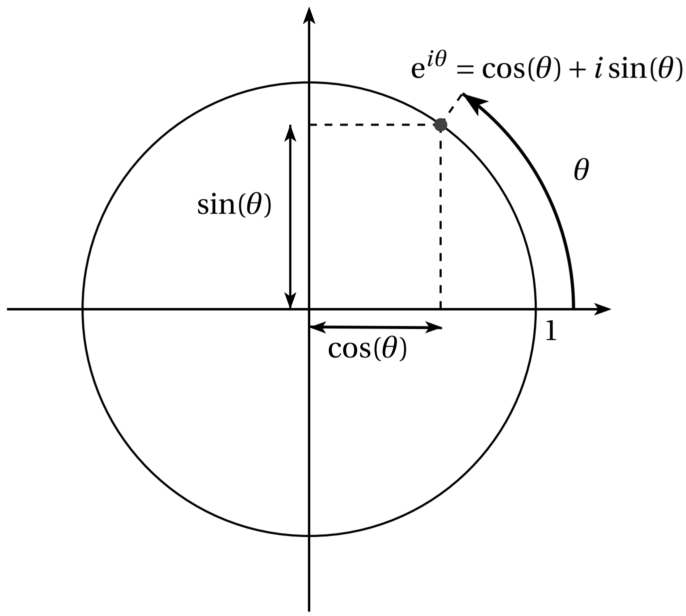
1.4 Nombres complexes de module 1

Définition 16 – Exponentielle d'un imaginaire pur

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On définit ainsi la fonction exponentielle sur $i\mathbb{R}$.

On a donc par définition $\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \sin(\theta)$.

✎ ***Exemple.*** Calculer e^{i0}, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{3\pi}{2}}$ et $e^{i2\pi}$.



Les propriétés des fonctions trigonométriques permettent de démontrer les propriétés suivantes.

Proposition 17 – Règles de calcul pour l'exponentielle d'un imaginaire pur

Si $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$
2. $e^{i\theta} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \cos(\theta) - i \times \sin(\theta)$
3. $e^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\theta} \times e^{i\alpha}$ et $e^{i(\theta-\alpha)} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}}$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$
5. $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
6. $e^{i\theta} = e^{i\alpha} \iff \theta = \alpha\ [2\pi]$
   et en particulier : $e^{i\theta} = 1 \iff \theta = 0\ [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$
7. **Formules d'Euler** :
   $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
8. **Formule de De Moivre** :
   $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left(\cos(\theta) + i \times \sin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \times \sin(n\theta)$
9. **Factorisation de l'angle moyen** :
   $e^{i\theta} + e^{i\alpha} = 2e^{i\frac{\theta+\alpha}{2}} \times \cos\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right)$ et $e^{i\theta} - e^{i\alpha} = 2ie^{i\frac{\theta+\alpha}{2}} \times \sin\left(\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right)$

On retrouve notamment la propriété de « morphisme » de l'exponentielle : elle transforme l'addition en multiplication. De plus elle ne s'annule pas sur $i\mathbb{R}$.

✎ ***Exemple.*** Pour $\theta \in \mathbb{R}$, factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 + e^{-i\theta}$.

✎ ***Exemple.*** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x+n\pi)$ et $\sin(x+n\pi)$.

Dans la suite on notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$$

Géométriquement, ce sont les points d'affixe z situés sur le cercle trignométrique.

Proposition 18 – Lien entre $\mathbb{U}$ et $e^{i\theta}$

L'ensemble $\mathbb{U}$ coïncide avec l'ensemble des nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Par 2π-périodicité de $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ on a plus simplement :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in [0, 2\pi[\}$$

ou encore $\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in]-\pi, \pi]\}$.

On peut énoncer ce résultat de manière plus complète.

Théorème 19 – Surjectivité de l'exponentielle complexe

L'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est non injective, mais est surjective.

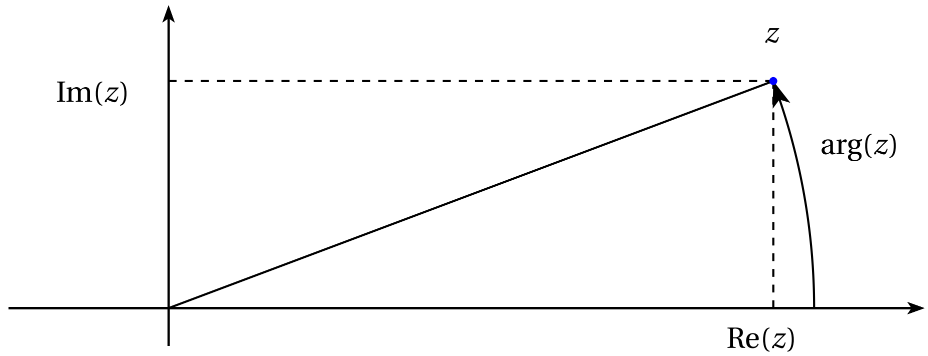
Si on considère sa restriction à $[0, 2\pi[$, on obtient une bijection de $[0, 2\pi[$ vers $\mathbb{U}$.

1.5 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 20 – Argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *argument* de z tout mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z.
On le note $\arg(z)$.



Définition 21 – Forme trigonométrique

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z| \times \Big(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\Big) = |z|\mathrm{e}^{i.\arg(z)}$
On dit qu'on a mis le nombre complexe z *sous forme trigonométrique.*

On a donc : $\mathrm{Re}(z) = |z| \times \cos(\arg(z))$ et $\mathrm{Im}(z) = |z| \times \sin(\arg(z))$

⚠ Le nombre 0 ne peut pas être mis sous forme trigonométrique. En effet son argument n'est pas défini.

Proposition 22 – Règles de calcul pour l'argument

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. **Forme trigonométrique ⟶ Forme algébrique :**
$$z_1 = \underbrace{|z_1| \times \cos\big(\arg(z_1)\big)}_{=\mathrm{Re}(z_1)} + i \times \underbrace{|z_1| \times \sin\big(\arg(z_1)\big)}_{=\mathrm{Im}(z_1)}$$
2. **Forme algébrique ⟶ Forme trigonométrique :**
$$\cos\big(\arg(z_1)\big) = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|} \qquad \text{et} \qquad \sin\big(\arg(z_1)\big) = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|}$$
3. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) = \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$
4. $\arg(\overline{z_1}) = -\arg(z_1)\ [2\pi]$
5. $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
6. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$
7. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$

✎ ***Exemple.*** Donner la forme trigonométrique de $1 + i$.

✎ ***Exemple.*** Donner la forme algébrique de $\mathrm{e}^{i2\pi/3}$.

La forme trigonométrique peut servir à factoriser des expressions trigonométriques.

Proposition 23 – Factorisation de $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)$

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$ et $\theta\in\mathbb{R}$.
Notons $z=a+ib\in\mathbb{C}$, $r=|z|$ et $\alpha=\arg(z)\ [2\pi]$ de telle sorte que $z=a+ib=r\mathrm{e}^{i\alpha}$.
Alors :

$$a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=r\cos(\theta-\alpha)$$

Application. On peut résoudre des équations du type $a\cos(\theta)+b\sin(\theta)=c$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$.

1.6 Applications des formules de De Moivre et d'Euler

• **Transformation de** $\cos(n\theta)$**,** $\sin(n\theta)$ **en polynômes en** $\cos(\theta)$**,** $\sin(\theta)$.

Les formules de De Moivre et du binôme de Newton donnent :

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=\big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\big)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\,i^k\sin^k(\theta)$$

d'où en séparant parties réelles et imaginaires, et en tenant compte du fait que $i^k=(-1)^{k/2}$ si k est pair et $i^k=i(-1)^{(k-1)/2}$ si k est impair, on a :

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \sum_{0\leq 2p\leq n}(-1)^p\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}(\theta)\sin^{2p}(\theta)\\
&= \cos^n(\theta)-\binom{n}{2}\cos^{n-2}(\theta)\sin^2(\theta)+\binom{n}{4}\cos^{n-4}(\theta)\sin^4(\theta)-\dots\\
\sin(n\theta) &= \sum_{0\leq 2p+1\leq n}(-1)^p\binom{n}{2p+1}\cos^{n-2p-1}(\theta)\sin^{2p+1}(\theta)\\
&= \binom{n}{1}\cos^{n-1}(\theta)\sin(\theta)-\binom{n}{3}\cos^{n-3}(\theta)\sin^3(\theta)+\dots
\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)=2\cos^2(\theta)-1$, $\cos(3\theta)=4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)$.

• **Linéarisation de polynômes en** $\cos(\theta)$**,** $\sin(\theta)$.
Inversement on peut « linéariser » des expressions polynômiales en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En effet partant de $\cos(\theta)=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta)=\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$, on peut développer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ grâce à la formule du binôme de Newton, et obtenir des expressions en $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

✎ ***Exemple.*** Linéarisation de $\sin^3(x)\times\cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x)\times\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\times\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\\
&= -\frac{1}{2^5 i}\Big((e^{ix})^3-3(e^{ix})^2e^{-ix}+3e^{ix}(e^{-ix})^2-(e^{-ix})^3\Big)\\
&\qquad\qquad\times\Big((e^{ix})^2+2e^{ix}e^{-ix}+(e^{-ix})^2\Big)\\
&= -\frac{1}{2^5 i}\Big(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\Big)\times\Big(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\Big)\\
&= -\frac{1}{2^5 i}\Big(e^{i5x}-e^{i3x}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-i3x}-e^{-i5x}\Big)\\
&= -\frac{1}{2^4}\Big(\sin(5x)-\sin(3x)-2\sin(x)\Big)
\end{aligned}$$

Retrouver le résultat avec les formules usuelles de trigonométrie.

Ce genre de calcul prendra toute son importance en calcul intégral.

1.7 Exponentielle d'un nombre complexe

On va définir la fonction exponentielle sur l'ensemble $\mathbb{C}$.

Définition 24 – Exponentielle d'un nombre complexe

Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors on pose :

$$e^z = e^{\mathrm{Re}(z)}\times\Big[\cos\big(\mathrm{Im}(z)\big)+i.\sin\big(\mathrm{Im}(z)\big)\Big] = e^{\mathrm{Re}(z)}\times e^{i.\mathrm{Im}(z)}$$

Le nombre complexe e^z, aussi noté $\exp(z)$, est appelé exponentielle de z.
La fonction $\exp : z\longmapsto e^z$ est appelée fonction exponentielle complexe.

La fonction exponentielle complexe a les propriétés suivantes.

Proposition 25 – Propriétés de l'exponentielle complexe

1. Si $z\in\mathbb{C}$, $\left|e^z\right| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg\left(e^z\right)=\mathrm{Im}(z)$.
2. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $e^z\neq 0$.
3. Si $z_1,z_2\in\mathbb{C}$: $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\times e^{z_2}$.
4. Si $z_1,z_2\in\mathbb{C}$: $e^{z_1}=e^{z_2}\iff z_1=z_2\ [2i\pi]\iff \exists k\in\mathbb{Z};\ z_1=z_2+2ik\pi$.

La propriété de « morphisme » est donc valable sur $\mathbb{C}$.

2 Équations polynômiales complexes

2.1 Racines n-ièmes réelles d'un nombre réel

Rappel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ notée $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$: $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

✎ ***Exemple.*** $\sqrt[3]{8} = 2$.

• Si n est pair et $a > 0$, l'équation $x^n = a$ a deux solutions réelles : $x = \pm\sqrt[n]{a}$.
Si $a = 0$ elle a une unique solution : $a = 0$.
Si $a < 0$, elle n'a pas de solution réelle car $x^n = (x^2)^{n/2} \geq 0$.

• Si n est impair, et a quelconque dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^n = a$ a une unique solution : $x = \sqrt[n]{a}$ si $a \geq 0$ et $x = -\sqrt[n]{-a}$ si $a < 0$.

En particulier si $a \geq 0$:

$$x^2 = a \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

et si $a < 0$ cette équation n'a pas de solution réelle.

✎ ***Exemple.*** $x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ et $x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.

De plus :

$$\begin{array}{lccc} \text{si } a \geq 0 : & x^3 = a & \Longleftrightarrow & x = \sqrt[3]{a} \\ \text{si } a < 0 : & x^3 = a & \Longleftrightarrow & x = -\sqrt[3]{-a} \end{array}$$

✎ ***Exemple.*** $x^3 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ et $x^3 = -1 \Longleftrightarrow x = -1$.

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls et x un réel positif, on sait que $\left(x^n\right)^p = x^{np} = \left(x^p\right)^n$.
On en déduit que :

$$\left(x^{1/n}\right)^{1/p} = x^{1/(np)} = \left(x^{1/p}\right)^{1/n} \quad \text{ie} \quad \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}$$

Si n est pair et x est un réel quelconque, alors l'expression x^n est un réel positif et donc l'expression $\sqrt[n]{x^n}$ a donc un sens mais attention :

$$\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En particulier $\sqrt{x^2} = |x| \neq x$ en général.

2.2 Racines carrées complexes d'un nombre complexe

Dans ce paragraphe on considère $a \in \mathbb{C}$ et on cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = a$.

Si $a = 0$, on sait d'après le paragraphe précédent que $z = 0$. Dans la suite on suppose donc $a \neq 0$.

Proposition 26 – Racines carrées sous forme trigonométrique

Si $a \neq 0$ on le note sous forme trigonométrique $a = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.
Alors l'équation $z^2 = a$ a deux solution complexes données par :

$$z = \pm\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\theta/2}$$

Ces deux solutions sont appelées *racines carrées* de a. Elles sont opposées l'une de l'autre.

⚠ Il y a deux racines carrées. On ne dit donc pas « la » racine carrée de a, mais « une » racine carrée de a.

⚠ On ne peut utiliser la notation $\sqrt{a}$ car on ne sait pas quelle racine carrée on veut désigner.
Si $a \geq 0$, on a montré qu'une des deux racines carrées de a est positive, et c'est celle-ci qu'on note $\sqrt{a}$, mais dans le cas général les racines carrées sont des nombres complexes, et elle n'ont donc pas de signe.

Cas particulier où a est un réel non nul.
Si $a > 0$ ses racines carrées complexes sont $\pm\sqrt{a}$; elles sont réelles.
Si $a < 0$ ses racines carrées complexes sont $\pm i\sqrt{a}$; elles sont imaginaires pures.

✎ ***Exemple.*** Les deux racines carrées de i sont $\pm\mathrm{e}^{i\pi/4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Racines carrées sous forme trigonométrique. En général on a besoin de connaître les deux racines carrées sous forme algébrique. La proposition précédente les donne sous forme trigonométrique, et on ne peut pas en déduire la forme algébrique car on ne connaît pas les valeurs de $\cos(\theta/2)$ et $\sin(\theta/2)$. On a donc besoin d'une autre méthode de calcul des deux racines carrées qui les donne directement sous forme algébrique.

On note donc $z = x + iy$ et $a = s + it$ où x, y, s et t sont des nombres réels (x et y sont les inconnues).

L'astuce consiste à remarquer que l'égalité $z^2 = a$ est équivalente aux deux égalités $\begin{cases} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases}$

On obtient le système d'inconnue x et y : $\begin{cases} x^2 - y^2 = s \\ 2xy = t \\ x^2 + y^2 = \sqrt{s^2 + t^2} \end{cases}$.

Les première équaqtion et la troisième (ajoutée grâce à l'astuce) permettent de calculer x^2 et y^2, puis x et y au signe près (cela donne 4 solutions). On utilise alors la seconde équation pour déterminer si x et y sont de même signe ou non (et ne retenir que 2 solutions).

✎ ***Exemple.*** Donner les racines carrées de $1 + i$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

2.3 Équations du second degré à coefficients complexes

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$.

Pour cela on introduit le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. On note δ et $-\delta$ les deux racines carrées du nombre complexe Δ ($\delta = -\delta = 0$ si $\Delta = 0$).

Théorème 27 – Solutions des équations du second degré à coefficients complexes

1. Si $\Delta = 0$: (E) a une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\delta \neq 0$: (E) a deux solutions $z = \dfrac{-b \pm \delta}{2a}$.

Dans le premier cas, on dis que l'équation a une *racine double*. Dans le second, on dit qu'elle a deux *racines simples*.

✎ ***Exemple.*** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+5i)z - 2(1-i) = 0$.

Inversement si on connaît les solutions de l'équation (E), on peut retrouver ses coefficients.

Théorème 28 – Relations coefficients-racines

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) (avec $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$).

1. On a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \times (z - z_1) \times (z - z_2)$$
et donc : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
2. Réciproquement si x et y sont solutions du système « somme-produit » $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ alors x et y sont les racines de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.

Dans les pays anglo-saxons, ce résultat est appelé théorème de Viète.

✎ ***Exemple.*** Trouver les racines de l'équation $3z^2 - (2+7i)z - 1 + 7i = 0$

✎ ***Exemple.*** Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système somme-produit $\begin{cases} x + y = -1 \\ x \times y = 1 - i \end{cases}$

2.4 Équations du second degré à coefficients réels

On veut cette fois résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

⚠ a, b, c sont des nombres réels.

Dans ce cas le discriminant Δ est un réel. Si $\Delta > 0$, ses racines carrées sont $\pm\sqrt{\Delta}$; si $\Delta < 0$, ses racines carrées sont $\pm i\sqrt{-\Delta}$; si $\Delta = 0$, il a une seule racine carrée qui est 0.

Théorème 29 – Résolution des équations du second degré à coefficients réels

1. Si $\Delta = 0$, (E) a une unique solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles distinctes : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes pures conjuguées : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dans $\mathbb{R}$ connaître les racines permet de faire une étude de signe.

Corollaire 30 – Signe d'un trinôme du second degré à coefficients réels

Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est « du signe de a en dehors des racines ».
   Plus précisément, si x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $x_1 < x_2$, alors pour $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   et pour $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $ax^2 + bx + c$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Si $\Delta \leq 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (donc de signe constant).
   Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$, **au sens strict**.
   Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c$ s'annule en un unique réel x_0, et est du signe de a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ **au sens strict**.

✎ ***Exemple.*** Donner le signe sur $\mathbb{R}$ des expressions $x^2 + x + 1$, $-x^2 + 3x - 2$ et $x^2 - 4x + 4$.

2.5 Racines n-ièmes de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va résoudre l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $z = 1$ si n impair, et $z = \pm 1$ si n pair.

Dans $\mathbb{C}$, on a le résultat suivant.

Théorème 31 – Racines n-ièmes de l'unité

L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions distinctes : $\mathrm{e}^{i2k\pi/n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Ces nombres complexes sont appelés racines n-ièmes de l'unité.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces nombres ; c'est une partie de $\mathbb{U}$.

On pose aussi $\omega_n = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}$. Ce complexe est appelé racine *primitive* n-ième de l'unité. Les racines n-ièmes de l'unité sont alors :

$$\mathbb{U}_n = \left\{1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}\right\}$$

c'est-à-dire que toutes les racines n-ièmes s'expriment en fonction de la racine n-ième primitive.

⚠ On doit dire **une** racine n-ième, et **la** racine n-ième **primitive**.

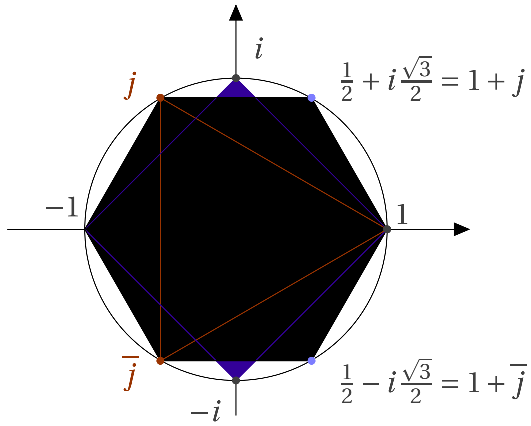
✎ ***Exemple.*** Pour $n = 1$, $\mathbb{U}_1 = \{1\}$ et $\omega_1 = 1$; pour $n = 2$, $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$ et $\omega_2 = -1$.
Pour $n = 3$, $\mathbb{U}_3 = \{1, j, \overline{j}\}$ avec $j = \omega_3 = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour $n = 4$, $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et $\omega_4 = i$.

✎ ***Exemple.*** Si $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.

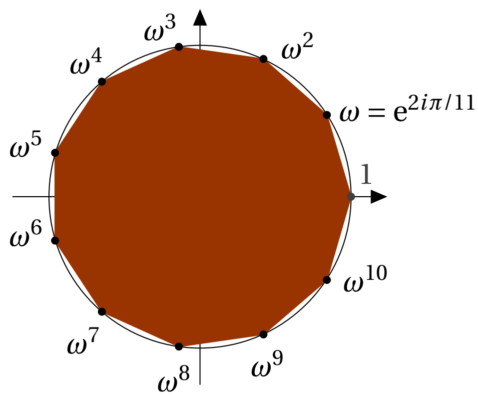
Proposition 32 – Interprétation géométrique

Les racines n-ièmes de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

La figure suivante représente les racines cubiques, 4-ièmes et 6-ièmes de l'unité :



Et celle-ci les racines 11-ièmes de l'unité (pour la lisibilité ω_{11} est noté ω) :



2.6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On va résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $a = 0$, on a une unique solution : $z = 0$.

Si $a \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 33 – Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe $a = \rho e^{i\alpha}$ non nul, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions distinctes appelées racines n-ièmes de a.
Elles sont de la forme $\sqrt[n]{\rho} \times e^{i(\alpha+2k\pi)/n} = z_0 \times \omega_n^k$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\alpha/n}$ est une racine « évidente » de $z^n = a$.

✎ ***Exemple.*** Les racines 4-ièmes de $1-i$ sont : $2^{1/8}e^{-i\pi/16}$, $-2^{1/8}e^{-i\pi/16}$, $2^{1/8}e^{i7\pi/16}$ et $2^{1/8}e^{-i9\pi/16}$

3 Nombres complexes et géométrie plane

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3.1 Alignement et orthogonalité

Commençons par rappeler le lien entre le calcul vectoriel dans la plan et le calcul avec les nombres complexes.

Proposition 34 – Calculs d'affixes

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, z et z' deux nombres complexes, M et M' deux points du plan.

1. Si $\vec{u}$ est d'affixe z et $\vec{v}$ d'affixe z' alors $\vec{u}+\vec{v}$ est d'affixe $z+z'$.
2. Si $\vec{u}$ est d'affixe z et λ un réel alors $\lambda.\vec{u}$ est d'affixe λz.
3. Si M est d'affixe z alors $\overrightarrow{OM}$ est d'affixe z et inversement.
4. Si M est d'affixe z et M' d'affixe z' alors $\overrightarrow{MM'}$ est d'affixe $z'-z$.

On peut traduire l'alignement de trois points du plan en termes d'affixe.

Proposition 35 – Affixes et alignement

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Alors :

$$A, B, C \text{ alignés } \iff \arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = 0\,[\pi] \iff \frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$$

✎ ***Exemple.*** Les points d'affixes i, 0 et $-i$ sont alignés.

On peut aussi traduire l'orthogonalité de deux vecteurs en termes d'affixe.

Proposition 36 – Affixes et orthogonalité

Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux } \iff \arg\left(\frac{a-b}{a-c}\right) = \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{a-b}{a-c} \in i\mathbb{R}$$

✎ ***Exemple.*** Les vecteurs d'affixe 1 et i sont orthogonaux.

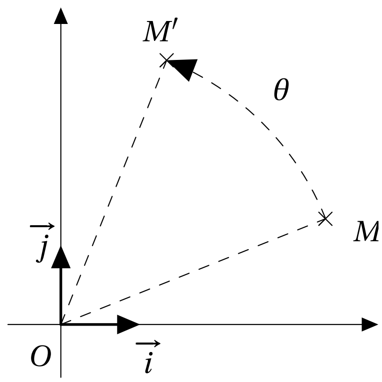
3.2 Transformations planes

Définition 37 – Rotations planes

On appelle *rotation plane* de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, l'application qui à un point M du plan associe le point M' tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ est θ.

Proposition 38 – Rotations planes et affixes

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est la rotation plane de centre O et d'angle θ.



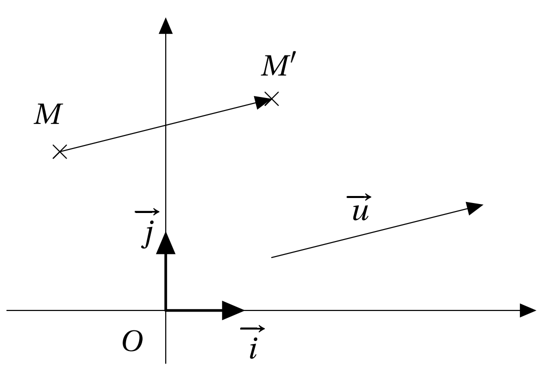
✎ ***Exemple.*** La multiplication par i correspond donc à la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Définition 39 – Translations

On appelle *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$, l'application qui à un point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Proposition 40 – Translations et affixes

Soit $b \in \mathbb{C}$.
L'application $z \longmapsto z + b$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.



L'addition avec un complexe revient donc géométriquement à faire une translation.

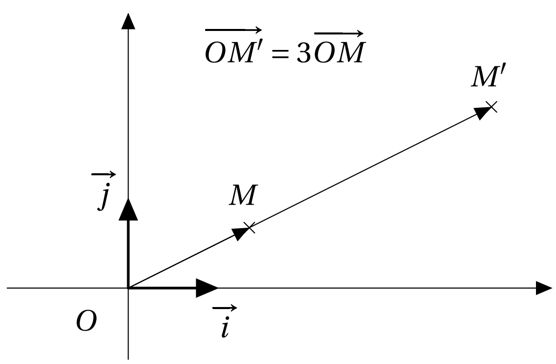
✎ ***Exemple.*** L'addition avec i correspond donc à la translation de vecteur $\overrightarrow{j}$.

Définition 41 – Homothéties

On appelle *homothétie* de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, l'application qui à un point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Proposition 42 – Translations et affixes

Soit $k \in \mathbb{R}^*$.
L'application $z \longmapsto kz$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est l'homothétie de centre O et de rapport k.



La multiplication par un complexe $a \neq 0$ correspond donc géométriquement à une rotation d'angle $\arg(a)$ suivie d'une homothétie de rapport $|a|$.

On rappelle aussi que la *conjugaison* correspond à la *symétrie axiale* d'axe $(0; \overrightarrow{i})$ (l'axe des abscisses).

4 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- ➥ Calculer avec des nombres complexes sous forme algébrique ou trigonométrique.
  - ✪ Savoir passer d'une forme à l'autre.
  - ✪ Connaître les propriérés des parties réelles et imaginaires.
  - ✪ Connaître les propriétés de l'argument et du module (notamment l'ingéalité triangulaire).

- ➥ Connaître les fonctions trigonométriques circulaires cos, sin et tan, et le formulaire associé.

- ➥ Simplifier les calculs de trigonométrie grâce l'exponentielle complexe.
  - ✪ Utiliser les formules d'Euler et de De Moivre.
  - ✪ Pour une somme d'exponentielles complexes, utiliser la factorisation de l'angle moyen.
  - ✪ Pour linéariser, utiliser la formule de De Moivre et la formule du binôme.

- ➥ Connaître les racines de l'unité et résoudre des équations polynomiales complexes.
  - ✪ Connaître les racines carrées, cubiques et 4-ièmes de l'unité.
  - ✪ Différencier la racine n-ième primitive de l'unité des $(n-1)$ autres racines n-ièmes de l'unité.
  - ✪ Trouver les deux racines carrées d'un complexes a sous forme algébrique ou trigonométrique.
  - ✪ Trouver les racines n-ièmes d'un complexe a sous forme algébrique.
  - ✪ Résoudre une équation du second degré à coefficients réels ou complexes grâce au discriminant.
  - ✪ Étudier le signe d'un polynôme du second degré à coefficients réels grâce à ses racines.

5 Exercices

Calculs dans $\mathbb{C}$

EXERCICE 1. Parties de $\mathbb{C}$

Déterminer les nombres complexes z tels que

$$|z| = |z-6+5i| \qquad |\overline{z}+i| = 2 \qquad z(2\overline{z}+1) = 1 \qquad |z^2| = |z|$$
$$\frac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{R}e\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right) = -\frac{\pi}{4}\ [\pi]$$

EXERCICE 2. Représentations d'un nombre complexe

1. (a) Donner les formes algébriques et trigonométriques de $(1+i)^3$ et $(1+i\sqrt{3})^{11}$.
   (b) Donner la forme algébrique de $\dfrac{1-4i}{1+5i}$.
2. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Déterminer module et argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$.

EXERCICE 3. Identité du parallélogramme

Montrer que :
$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \quad |z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).$$
Interpréter géométriquement.

Trigonométrie

EXERCICE 4. Equations et inéquations trigonométriques

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x) \geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) > -1$;
$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$; $\sin^2 x + 3\cos x - 1 < 0$; $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$;
$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

EXERCICE 5. Nombre de solutions d'une équation trigonométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $]0, \pi[$ l'équation : $\cos(n\theta) = 0$. Donner le nombre exact de solutions.

EXERCICE 6. Linéarisation

Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x \sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

EXERCICE 7. Sommes trigonométriques

Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 8. Somme trigonométrique

Calculer la somme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(kb+a)$$

où a et b sont deux réels donnés.

EXERCICE 9. Somme trigométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos(x)^k} = 0$.

EXERCICE 10. Antilinéarisation

Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Equations polynomiales

EXERCICE 11. Equations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ et $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.

EXERCICE 12. Le nombre complexe j

Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\frac{1}{(1+j)^4}$, $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

EXERCICE 13. Racines n-ièmes d'un nombre complexe

1. Résoudre les équations suivantes : $z^3 = -1$, $z^4 - i = 0$ et $z^3 = -(2+i)^3$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ et $z^6 - (3-2i)z^3 + (2-2i) = 0$.

EXERCICE 14. Systèmes somme-produit

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & -1 \end{array}\right.$.
2. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. Calculer $u+v$, uv et en déduire la valeur de u et v.

EXERCICE 15. Racine n-ième d'un nombre complexe

Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\displaystyle\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 1$.

EXERCICE 16. Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = i(1-z)^n$.

EXERCICE 17. Racine n-ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$. Calculer $(1-\omega)\times S_n$ et en déduire S_n.

EXERCICE 18. Racine n-ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|$.

EXERCICE 19. Racine n-ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Calculer : $\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n$.

Sujets de synthèse

EXERCICE 20. Une fonction numérique à valeurs complexes

On note $E = \{z \in \mathbb{C} / \mathscr{I}m(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \left(z \in E \implies \dfrac{z-i}{z+i} \in F\right)$.
2. On définit alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & F \\ & z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

   Établir que f est bijective de E sur F. Déterminer l'application f^{-1}.

3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
   (a) On note $E_1 = \left\{z \in E ; \mathscr{R}e(z) = 0\right\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.
   (b) On note $E_2 = \left\{z \in E ; |z| = 1\right\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement .

EXERCICE 21. Une fonction numérique à valeurs complexes

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On identifie $z \in \mathbb{C}$ et le point M_z d'affixe z.

1. Quels sont les points z invariants par f ?
2. Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique T ?
3. Quelle est l'image réciproque par f de la droite réelle ?

EXERCICE 22. Surjectivité de l'exponentielle complexe

Montrer que la fontion exponentielle est un surjection de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}^*$. Est-elle injective ?

EXERCICE 23. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Il s'agit de montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

1. Montrer que :

$$\text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2. (a) Vérifier que, pour z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_1| \quad \Longrightarrow \quad z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument}$$

   (b) En déduire par récurrence que, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Longrightarrow \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$