Chapitre 5

Dérivées, primitives et équations différentielles

Sommaire

1 Rappels et compléments de calcul différentiels

1.1 Dérivée d'une fonction numérique réelle

Si u est dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un second intervalle J, et si v est dérivable sur cet intervalle J, alors la fonction $v \circ u : x \longmapsto v\big(u(x)\big)$ est dérivable sur le premier intervalle I :

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \\ I \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "v\circ u"'] & \end{tikzcd}$$

et pour tout $x \in I$:

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'\big(u(x)\big)$$

On obtient le tableau des formules de dérivations usuelles :

$\left(\dfrac{1}{u}\right)'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$	$\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\left(u^\alpha\right)'(x) = \alpha \times u'(x) \times u(x)^{\alpha-1}$	$\big(\sin(u)\big)'(x) = u'(x) \times \cos\big(u(x)\big)$
$\big(\cos(u)\big)'(x) = -u'(x) \times \sin\big(u(x)\big)$	$\big(\tan(u)\big)'(x) = u'(x) \times \Big(1 + \tan^2\big((u(x))\big)\Big) = \dfrac{u'(x)}{\cos\big(u(x)\big)^2}$
$\left(e^u\right)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$\big(\ln(u)\big)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\big(\arctan(u)\big)'(x) = \dfrac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$	$\big(\arcsin(u)\big)'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}} = -\big(\arccos(u)\big)'(x)$
$\big(\mathrm{sh}(u)\big)'(x) = u'(x) \times \mathrm{ch}\big(u(x)\big)$	$\big(\mathrm{ch}(u)\big)'(x) = u'(x) \times \mathrm{sh}\big(u(x)\big)$

Dans le cas d'une fonction de deux variables :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

on note :

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ la *dérivée partielle de f par rapport à x*, c'est-à-dire la dérivée par rapport à x en considérant que y est une constante ;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ la *dérivée partielle de f par rapport à y*, c'est-à-dire la dérivée par rapport à y en considérant que x est une constante.

Pour alléger les notations, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est aussi noté $\partial_1 f$, et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est notée $\partial_2 f$.

✎ ***Exemple.*** Pour $f(x, y) = x^5 + 3x^2 y^3 + \ln(y) + \sqrt{x^2 y}$, calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Pour les fonctions d'une variable t, la dérivée $u'(t)$ est aussi parfois notée $\dfrac{du}{dt}(t)$, et même $\dfrac{du}{dt}$ par abus de notation.

1.2 Dérivée d'une fonction numérique complexe

Si u est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on note α et β les fonctions $\text{Re}(u)$ et $\text{Im}(u)$ définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in I, \quad u(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$$

On dit alors que u est dérivable sur l'intevralle I lorsque α et β le sont et on définit la fonction $u' : I \longrightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in I, \quad u'(x) = \alpha'(x) + i\beta'(x)$$

On peut montrer que les formules connues pour les fonctions à valeurs réelles sont encore valables pour les fonctions à valeurs complexes (dérivée d'un produit...).

Proposition 1 – Dérivée de $\exp(\varphi)$

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I.
La fonction $\exp(\varphi)$ est alors dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, \quad \left(\mathrm{e}^{\varphi}\right)'(x) = \varphi'(x) \times \mathrm{e}^{\varphi(x)}$$

En particulier, si $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$$

✎ ***Exemple.*** $x \longmapsto \mathrm{e}^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(\mathrm{e}^{ix}\right)' = i\mathrm{e}^{ix}$.

1.3 Primitives d'une fonction numérique réelle ou complexe

Définition 2 – Primitive d'une fonction numérique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).
On appelle *primitive* de f sur l'intervalle I, toute fonction F définie et dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$) et telle que $F' = f$.

Proposition 3 – Description de l'ensemble des primitives d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).
On suppose qu'il existe au moins une primitive F de f sur l'intervalle I.
Dans ce cas, f possède une infinité de primitives sur l'intervalle I. De plus elles sont toutes de la forme $x \longmapsto F(x) + C$ où C est une constante réelle (resp. complexe).

C'est pour cette raison qu'on ne dit pas **la** primitive mais **une** primitive.

Proposition 4 – Cas des fonctions à valeurs complexes

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ et si on note α et β ses parties réelles et imaginaires, alors toute primitive F de f sur l'intervalle I est de la forme $F : x \longmapsto A(x)+iB(x)$ où A est une primitive de α sur I, et B est une primitive de β sur I.

Application. Soit λ un nombre complexe non nul de parties réelle et imaginaire notée a et b. En remarquant qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto e^{\lambda x}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$, et en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient une primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \longmapsto e^{x}\cos(2x)$.

On rappelle les primitives des fonctions usuelles.

Fonction	Primitive	Intervalle et conditions
x^{α}	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$x>0$ (au minimum...) et $\boxed{\alpha \neq -1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x>0$
e^{x}	e^{x}	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$x>0$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$ ou $-\arccos(x)$	$x \in]-1,1[$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans J, et si f est dérivable sur ce même intervalle J, on a vu que $f \circ u$ est dérivable sur I et que :

$$\forall x \in I, \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big)$$

Ce résultat, combiné avec le tableau précédent, permet d'établir le tableau des primitives des fonctions composées usuelles.

Fonction	Primitive	Condition
$u'(x) \times u(x)^\alpha$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	aucune
$u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$u'(x) \times \cos\big(u(x)\big)$	$\sin\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x) \times \sin\big(u(x)\big)$	$-\cos\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x) \times \Big[1+\tan^2\big(u(x)\big)\Big] = \dfrac{u'(x)}{\cos^2\big(u(x)\big)}$	$\tan\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x) \times \mathrm{ch}\big(u(x)\big)$	$\mathrm{sh}\big(u(x)\big)$	aucune
$u'(x) \times \mathrm{sh}\big(u(x)\big)$	$\mathrm{ch}\big(u(x)\big)$	aucune
$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan\big(u(x)\big)$	aucune
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	$\arcsin\big(u(x)\big)$ ou $-\arccos\big(u(x)\big)$	aucune

Pour terminer ce paragraphe nous allons voir comment trouver une primitive d'une fonction de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

On commence par déterminer le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du dénominateur.

$\boxed{\text{Si } \Delta > 0.}$ Le polynôme ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. On cherche une décomposition de la forme $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} = \dfrac{\lambda}{x-r_1} + \dfrac{\mu}{x-r_2}$ où λ et μ sont deux constantes réelles à déterminer. Ensuite chaque terme se primitive avec un logarithme.

$\boxed{\text{Si } \Delta = 0.}$ Le polynôme ax^2+bx+c admet une racine réelle r et on a la factorisation $\dfrac{1}{ax^2+bx+c} = \dfrac{1}{a(x-r)^2}$. Sous cette forme une primitive est $x \longmapsto -\dfrac{1}{a(x-r)}$.

$\boxed{\text{Si } \Delta < 0.}$ Le polynôme ax^2+bx+c n'admet pas de racine réelle. En le factorisant *sous forme canonique*, on trouve une primtive utilisant la fonction arctan.

✎ ***Exemple.*** Donner une primitive des fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

1.4 Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

On appelle *segment* un intervalle fermé et borné $[a, b]$.

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le nombre réel l'aire algébrique du domaine du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, et la courbe représentative de f.

L'aire des parties du domaine situées au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement; celle des parties du domainesituées en-dessous sont comptées négativement.

Ensuite, on pose aussi $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (on dira que les bornes étaient dans le « mauvais sens »).

Dans la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ la variable t est muette : elle peut être remplacée par tout autre lettre non utilisée.

Le théorème suivant est appelé *théorème fondamental de l'analyse.*

Théorème 5 – Intégrale dépendant d'une de ses bornes

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et x_0 un point de I.
On définit une fonction φ par : $\varphi(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction φ est alors définie et dérivable sur I et : $\forall x \in I,\ \varphi'(x) = f(x)$.

Autrement dit φ est *l'unique primitive* de f sur I qui s'annule en x_0 : $\varphi(x_0) = 0$.

C'est à cause de ce théorème qu'on emploit les mots « intégrer » et « primitiver » comme des synonymes.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction $x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Théorème 6 – Calcul d'une intégrale à partir d'une primitive

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Si on connaît une primitive F de f sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ est souvent noté $\big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b}$, ou encore $\big[F(t)\big]_a^b$ s'il n'y a pas de confusion possible entre les variables.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite de classe C^1 sur I, lorsqu'elle est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

⚠ Cela sous-entend qu'il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue.

Théorème 7 – Calcul d'une intégrale par intégration par parties

Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t) \times g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t) \times g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette formule permet de remplacer une fonction par sa dérivée, ce qui peut être utile pour les fonctions $x \longmapsto x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$), ln, arccos et arcsin.

Cette formule n'a d'intérêt que si l'expression de $f'(t)$ est *plus simple* que celle de $f(t)$, et si l'expression de $g(t)$ n'est pas trop compliquée par rapport à celle de $g'(t)$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

Théorème 8 – Calcul d'une intégrale par changement de variable

On suppose que :

- φ est de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$;
- f est continue sur le segment $\big[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\big]$.

Alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \times \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

En pratique on pose $x = \varphi(t)$ et on écrit formellement « $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ». Il ne faut pas oublier de déterminer les bornes de la nouvelle intégrale.

✎ ***Exemple.*** Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \ln(t)$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ en posant $x = \sin(t)$.

2 Notions sur les équations différentielles linéaires

2.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 9 – Équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre sur I* toute relation du type

$$(E): \qquad \forall t \in I,\ y'(t) + a(t).y(t) = b(t)$$

où les coefficients a et b sont des fonctions continues sur I à valeurs réelles ou complexes, et y est une fonction inconnue dérivable sur I à valeurs réelles ou complexes.
Toute fonction y qui satisfait (E) sur I est appelée une *solution*.

Dans la pratique, on omet la variable de l'inconnue y pour alléger l'écriture de (E), ce qui donne

$$(E): \qquad y' + a(t).y = b(t)$$

On appelle *équation homogène associé* l'équation différentielle (E_0) : $y' + a(t).y = 0$.

Dans la suite on notera $\mathbb{K}$ un ensemble qui peut être au choix $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (mais une fois fait ce choix doit rester le même).

Théorème 10 – Résolution de l'équation homogène

Soient a une fonction continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et A une primitive quelconque de a sur I.
Les solutions de l'équation homogène (E_0) : $\quad y' + a(t).y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto C\mathrm{e}^{-A(t)}$ avec C quelconque dans $\mathbb{K}$.

Pour éviter toute erreur de signe, on peut mettre l'équation sous la forme $y' = -a(t).y$.

Noter qu'il y a une infinité de solutions.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + t.y = 0$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $y' + \frac{1}{t}y = 0$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ dans le cas où a est une fonction constante.

Théorème 11 – Résolution de l'équation entière

Si y_1 désigne une solution particulière de l'équation (E) alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto y_1(t) + y_0(t)$ avec y_0 solution de l'équation homogène associée (E_0).

Afin de trouver une solution particulière, il arrive parfois qu'on décompose le second membre en plusieurs fonctions plus simples ; on peut alors exploiter le résultat suivant.

Proposition 12 – Principe de superposition des solutions

Soit (E) : $y' + a(t).y = b_1(t) + b_2(t)$ avec a, b_1 et b_2 des fonctions continues sur I.
Si, pour $i \in \{1,2\}$, y_i est solution de l'équation (E_i) : $y' + a(t).y = b_i(t)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de (E).

Si on ne trouve pas de solution de manière « intuitive » (la plupart du temps en s'inspirant du second membre), on peut utiliser la méthode suivante, dite *méthode de variation de la constante*.

Elle consiste à chercher une solution particulière y_1 sous la forme $y_1(t) = C(t).\mathrm{e}^{-A(t)}$ où C est une fonction dérivable sur I et A est une primitive de a sur I. On part donc de la solution générale de l'équation homogène et on remplace la constante C par une fonction $t \longmapsto C(t)$.On injecte alors y_1 dans l'équation différentielle ce qui donne $C'(t)$ puis $C(t)$ puis $y_1(t)$.

On peut montrer que si $t_0 \in I$ alors $C(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{A(s)}\,\mathrm{d}s$ mais cette formule est trop compliquée pour être retenue, c'est pourquoi on préfère faire le calcul précédent où il suffit de réinjecter dans l'équation différentielle sans connaître de formule supplémentaire.

Lorsqu'on réinjecte on obtient :

$$\forall t \in I, \quad C'(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \underbrace{-C(t) \times a(t) \times \mathrm{e}^{-A(t)} + C(t) \times a(t) \times \mathrm{e}^{-A(t)}}_{=0} = 0$$

donc on peut retenir que pour le membre de gauche on ne garde que le premier terme.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation $(1-t^2).y' - t.y = 1$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - t.y = t$.

En plus de la méthode pratique de résolution, il faut aussi connaître le résultat théorique suivant.

Définition 13 – Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y' + a(t).y = b(t) \\ y(t_0) = \gamma \end{cases}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, t_0 est un point de I et γ un élément donné de $\mathbb{K}$.

Théorème 14 – Solution d'un problème de Cauchy

Un problème de Cauchy admet une unique solution sur l'intervalle I où il est défini.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $]-1,1[$ le problème de Cauchy $\begin{cases}(1-t^2).y'-t.y=1\\ y(0)=1\end{cases}$

2.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 15 – Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sur I* toute relation du type

$$(E): \qquad \forall t \in I,\ y''(t)+a.y'(t)+b.y(t)=f(t)$$

où les coefficients a et b sont des constantes réelles ou complexes, f est une fonction continue sur I à valeurs réelles ou complexes, et y est une fonction inconnue deux fois dérivable sur I à valeurs réelles ou complexes.
Toute fonction y qui satisfait (E) sur I est appelée une *solution*.

Dans la pratique, on omet la variable de l'inconnue y pour alléger l'écriture de (E), ce qui donne

$$(E): \qquad y''+a.y'+b.y=f(t)$$

On appelle *équation homogène associé* l'équation différentielle $(E_0):\ y''+a.y'+b.y=0$.

Définition 16 – Équation caractéristique

On appelle *équation caractéristique* associée à l'équation homogène (E_0) l'équation :

$$r^2+ar+b=0$$

d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 17 – Solutions complexes de l'équation homogène

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. **Si** $\Delta \neq 0$.
   L'équation caractéristique possède deux racines disctinctes α et β et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t)=\lambda e^{\alpha t}+\mu e^{\beta t}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.
2. **Si** $\Delta = 0$.
   L'équation caractéristique possède une racine double α et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t)=(\lambda t+\mu)e^{\alpha t}$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$.

Noter que ce résultat donne les solutions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ que les coefficients a et b soient réels ou complexes.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0$.

Théorème 18 – Solutions réelles de l'équation homogène

On suppose ici que a et b sont des réels.
On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique.

1. **Si** $\Delta > 0$.
   L'équation caractéristique possède deux racines réelles disctinctes α et β et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
2. **Si** $\Delta = 0$.
   L'équation caractéristique possède une racine réelle double α et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{\alpha t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
3. **Si** $\Delta < 0$.
   L'équation caractéristique possède deux racines complexes disctinctes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ et les solutions de (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y(t) = \big(\lambda.\cos(\omega t) + \mu.\sin(\omega t)\big).e^{\alpha t}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y'' + \omega^2 y = 0$ (avec $\omega > 0$) et $y'' - \omega^2 y = 0$.

Théorème 19 – Résolution de l'équation entière

Si y_1 désigne une solution particulière de l'équation (E) alors les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $t \longmapsto y_1(t) + y_0(t)$ avec y_0 solution de l'équation homogène associée (E_0).

Afin de trouver une solution particulière, il arrive parfois qu'on décompose le second membre en plusieurs fonctions plus simples; on peut alors exploiter le résultat suivant.

Proposition 20 – Principe de superposition des solutions

Soit $(E) : \ y'' + a.y' + b.y = f_1(t) + f_2(t)$ avec f_1 et f_2 des fonctions continues sur I.
Si, pour $i \in \{1,2\}$, y_i est solution de l'équation (E_i) : $\quad y'' + a.y' + b.y = f_i(t)$ alors la fonction $y_1 + y_2$ est solution de (E).

Pour trouver une solution particulière il faut s'inspirer de la forme du second membre $f(t)$. En particulier il faut connaître le cas particuliers suivants.

Théorème 21 – Cas où $f(t) = r.e^{\theta t}$

On suppose que (r,θ) sont des constantes réelles ou complexes et que f est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = r.e^{\theta t}$.
On peut alors trouver une solution particulière de (E) sous la forme :

$$y(t) = \begin{cases} \rho.e^{\theta t} & \text{si } \theta \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique} \\ \rho.t.e^{\theta t} & \text{si } \theta \text{ est racine simple de l'équation caractéristique} \\ \rho.t^2.e^{\theta t} & \text{si } \theta \text{ est racine double de l'équation caractéristique} \end{cases}$$

où ρ est une constante à déterminer par le calcul.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 3y' + 2y = 2\,\mathrm{ch}(t)$.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 2y = \cos(t) + \sin(t)$.

En plus de la méthode pratique de résolution, il faut aussi connaître le résultat théorique suivant.

Définition 22 – Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy la donnée d'une équation différentielle et d'une double condition initiale :

$$\begin{cases} y'' + a.y' + b.y = f(t) \\ y(t_0) = \delta \\ y'(t_0) = \gamma \end{cases}$$

où a et b sont des constantes, f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, t_0 est un point de I, δ et γ sont deux éléments donnés de $\mathbb{K}$.

Théorème 23 – Solution d'un problème de Cauchy

Un problème de Cauchy admet une unique solution sur l'intervalle I où il est défini.

✎ ***Exemple.*** Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \cos(t) + \sin(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

- Maîtriser le calcul intégro-différentiel.
  - Connaître les formules de dérivation/intégration des fonctions usuelles.
  - Connaître les formules de dérivation/intégration pour les opérations sur les fonctions.
  - Savoir dérivéer une intégrale fonction de ses bornes.
  - Faire une intégration par parties.
  - Faire un changement de variable.

- Savoir étudier une équation différentielle linéaire du premier ordre.
  - Connaître les résultats théoriques sur l'ensemble des solutions, avec ou sans condition initiale.
  - Connaître la forme générale des solutions de l'équation homogène..
  - Trouver une solution particulière par variation de la constante.
  - Trouver une solution particulière « à vue ».

- Savoir étudier une équation différentielle linéaire du premier ordre.
  - Connaître les résultats théoriques sur l'ensemble des solutions, avec ou sans condition initiale.
  - Connaître la forme générale des solutions de l'équation homogène, dans les cas réelles ou complexes.
  - Plonger l'équation dans l'ensemble des complexes pour simplifer la recherche de solutions particulières.
  - Connaître la forme des solutions particulières lorsque le second membre a une expression de la forme $re^{\theta t}$.
  - Trouver une solution particulière « à vue ».

4 Exercices

Equations différentielles d'ordre 1

EXERCICE 1. Calculs de primitives

1. Déterminer « à vue » les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

a) $x \longmapsto x\mathrm{e}^{x^2}$	*b*) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$	*c*) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$	*d*) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
e) $x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$	*f*) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$	*g*) $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4}$	*h*) $x \longmapsto \tan(x)$

2. Déterminer à l'aide d'une intégration par partie les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

a) $x \longmapsto \ln(x)$	*b*) $x \longmapsto x\arctan(x)$	*c*) $x \longmapsto (x^2-x+1)\mathrm{e}^{-x}$
d) $x \longmapsto (x-1)\sin(x)$	*e*) $x \longmapsto (x+1)\,\mathrm{ch}(x)$	*f*) $x \longmapsto x\sin(x)^3$

3. Déterminer à l'aide du changement de variable indiqué les primitives des fonctions suivantes en précisant l'intervalle :

a) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$	$u=\sqrt{x}$	*b*) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x+x(\ln x)^2}$	$z=\ln(x)$
c) $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x+1}$	$y=\mathrm{e}^x$	*d*) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$w=1/x$

EXERCICE 2. Sans variation de la constante

Résoudre les équation différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on essaiera de deviner une solution proche du second membre, plutot que d'utiliser la méthode de variation de la constante.

1. $y' - \mathrm{e}^t y = 3\mathrm{e}^t$
2. $y' + y = \cos t + \sin t$
3. $y' + 2y = t^2 - 2t + 3$

EXERCICE 3. Avec variation de la constante

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I donné.

1. $(1-t)y' + y = \dfrac{t-1}{t}$ sur $I =]1, +\infty[$
2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$ sur $I = \mathbb{R}$
3. $t^2 y' - y = (t^2-1)e^t$ sur $I =]-\infty, 0[$
4. $ty' - 2y = t^3$ sur $I =]0, +\infty[$
5. $ty' + y = \arctan t$ sur $I =]0, +\infty[$

EXERCICE 4. Equation intégrale

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2f(t) = 3t \times \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Equations différentielles d'ordre 2

EXERCICE 5. Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Résoudre les équations différentielles.

1. $y'' - y = \sin(2t)$ et $y(0) = y'(0) = 0$
2. $y'' + y = \sin(t)$ et $y(0) = y'(0) = 0$
3. $y'' - 2y' + y = 5e^t$
4. $y'' - 2y' + y = -e^{-t}$
5. $y'' + 4y = \sin^2 t$ et $y(0) = y'(0) = 0$
6. $y'' - 3y' + 2y = t^2 - t + 3$
7. $y'' - 2y' + 5y = e^{-2t}\cos(2t)$

EXERCICE 6. Second membre à linéariser

Réosudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2(t)$

EXERCICE 7. Changement de variable

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + \left(4e^t - 1\right)y' + 4e^{2t}y = 0$ à l'aide du changement de variable $x = e^t$.

EXERCICE 8. Changement d'inconnue

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $t^2y'' - ty' + y = 0$ à l'aide du changement d'inconnue $y(t) = t \times z(t)$.

EXERCICE 9. Equation intégrale

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sin(t) + 2 \times \int_0^t e^{t-x} f(x)\,dx$$

EXERCICE 10. Une équation fonctionnelle

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et satisfaisant la relation :

$$(R) : \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+t) + f(x-t) = 2f(x)f(t).$$

1. Soit f une fonction deux fois dérivable qui satisfait (R). On suppose que f n'est pas constante nulle.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante réelle k telle que f satisfait l'équation différentielle $y'' + ky = 0$.
   (c) En discutant suivant les valeurs de k, en déduire une expression de $f(x)$.
2. Donner toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables et satisfaisant la relation (R).