Chapitre 6

Suites réelles et complexes

Sommaire

1 Propriétés générales des suites réelles

1.1 Rappels sur les propriétés de $\mathbb{R}$

1.1.1 Relation d'ordre

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$. On a donc : $x < y \Longrightarrow x \leq y$.

De plus le contraire de $x < y$ est $x \geq y$, alors que le contraire de $x \leq y$ est $x > y$.

Proposition 1 – Compatibilité avec le passage à l'opposé

Soient x et y deux nombres réels tels que $x \leq y$. On a alors $-y \leq -x$.

Proposition 2 – Compatibilité avec l'addition

Soient x, x', b, et b' des nombres réels tels que $x \leq b$ et $x' \leq b'$.
On a alors $x + x' \leq b + b'$.
En particulier pour tout réel a, on a $x + a \leq x' + a$.

Majorer un nombre réel x c'est trouver un réel b tel que $x \leq b$; le *minorer* c'est trouver un réel c tel que $c \leq x$.

Des inégalités entre nombres réels $\begin{array}{c} c \leq x \leq b \\ c' \leq x' \leq b' \end{array}$ on tire $\begin{array}{c} c + c' \leq x + x' \leq b + b' \\ c - b' \leq x - x' \leq b - c' \end{array}$

Autrement dit :

Pour majorer (resp. minorer) une somme de deux nombres réels, on majore (resp. minore) chacun des termes. Pour majorer une différence $x - x'$, on majore x et on minore x' ; pour minorer $x - x'$, on minore x et on majore x'.

⚠ On ne peut donc jamais *soustraire* deux inégalités : les inégalités $\begin{array}{c} c \leq x \leq b \\ c' \leq x' \leq b' \end{array}$ ne donnent pas $c - c' \leq x - x' \leq b - b'$.

Les propriétés suivantes sont donnés pour des nombres positifs. Si ce n'est pas le cas, il faut commencer par changer leur signe en passant à l'opposé.

Proposition 3 – Compatibilité avec le passage à l'inverse

Soient x et y deux nombres réels tels que $0 < x \leq y$. On a alors $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.

Proposition 4 – Compatibilité avec la multiplication

Soient x, x', b, et b' des nombres réels tels que $0 \leq x \leq b$ et $0 \leq x' \leq b'$.
On a alors $0 \leq xx' \leq bb'$.
En particulier pour tout réel a positif, on a $0 \leq ax \leq ax'$.

Lorsqu'il s'agit de nombres *strictement positifs*, les inégalités $\begin{array}{c} 0 < c \leq x \leq b \\ 0 < c' \leq x' \leq b' \end{array}$ donnent

$$0 < cc' \leq xx' \leq bb'$$
$$0 < \frac{c}{b'} \leq \frac{x}{x'} \leq \frac{b}{c'}$$

Autrement dit :
Pour majorer (resp. minorer) un produit de deux nombres strictement positifs, on majore (resp. minore) chacun des facteurs. Pour majorer un quotient x/x' de deux nombres strictement positifs, on majore le numérateur et on minore le dénominateur; pour minorer x/x', on minore le numérateur et on majore le dénominateur.

⚠ On ne peut donc jamais *diviser* deux inégalités : les inégalités $\begin{array}{c} 0 < c \leq x \leq b \\ 0 < c' \leq x' \leq b' \end{array}$ ne donnent pas $c/c' \leq x/x' \leq b/b'$.

1.1.2 Intervalles

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On définit les notations suivantes :

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé borné = segment;
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x < b\}$ intervalle borné;
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a < x \leq b\}$ intervalle borné;
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ a < x < b\}$ intervalle ouvert borné;
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x\}$ intervalle fermé;
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} /\ a < x\}$ intervalle ouvert;
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ x \leq b\}$ intervalle fermé;
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ x < b\}$ intervalle ouvert;
- $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ intervalle ouvert <u>et</u> fermé.

✎ ***Exemple.*** $[a, b] = \left\{ta + (1-t)b;\ t \in [0, 1]\right\}$.

Théorème 5 – Caractérisation des intervalles

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors :

$$I \text{ est un intervalle } \Longleftrightarrow \forall (a, b) \in I^2, \left(a < b \Longrightarrow [a, b] \subseteq I\right)$$

✎ ***Exemple.*** $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle puisque $-1 \in \mathbb{R}^*$, $1 \in \mathbb{R}^*$ mais $[-1,1] \not\subset \mathbb{R}^*$.

Définition 6 – Intérieur et extérieur d'un intervalle

Soit I un intervalle. On pose :

- $\overset{\circ}{I} = I$ privé de ses bornes = intérieur de I. C'est un intervalle ouvert.
- $\overline{I} = I$ union ses bornes = adhérence de I. C'est un intervalle fermé.

On a bien évidemment $\overset{\circ}{I} \subseteq I \subseteq \overline{I}$.

⚠ Attention : ne pas confondre la notation de l'adhérence avec celle du complémentaire.

✎ ***Exemple.*** Pour $I = [0,1[$ les bornes sont 0 et 1, $\overset{\circ}{I} =]0,1[$ et $\overline{I} = [0,1]$.
Le complémentaire de I (dans $\mathbb{R}$) est $\mathbb{R}\setminus I =]-\infty, 0[\cup [1,+\infty[$.

1.1.3 Valeur absolue

Définition 7 – Valeur absolue

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

Une valeur absolue est donc toujours positive. Elle sera donc souvent utilisée dans les inégalités qui ne se sont conservées par produit que si on multiplie par un nombre positif.

✎ ***Exemple.*** Exprimer l'expression $|x^2-4|-|x+2|+|x-3|$ sans valeur absolue.

Sachant que la valeur absolue coïncide avec le module pour les nombres réels, on obtient les propriété suivantes.

Proposition 8 – Règles de calcul

Soient x et y deux réels.

1. $|-x| = |x|$.
2. $|x \times y| = |x| \times |y|$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \left|x^n\right| = |x|^n$.

Proposition 9 – Valeur absolue et inégalités

Soient x et y deux réels.

1. $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Si $\alpha \geq 0$: $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$.

Une inégalité du type $|x-a| \leq b$ signifie que $a-b \leq x \leq a+b$, c'est-à-dire que $x \in [a-b, a+b]$; x est donc dans un intervalle centré en a et de *rayon* b.

Si x est un réel inconnu et a est un réel connu, on dit que a est *une valeur approchée de x à la précision ε* (où ε est un réel strictement positif), lorsque $|x-a| \leq \varepsilon$. On dit aussi que a est une valeur approchée de x *à ε près.*

Plus précisément si $0 \leq a-x \leq \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x *par excés* à la précision ε; si $0 \leq x-a \leq \varepsilon$, on dit que a est une valeur approchée de x *par défaut* à la précision ε.

Proposition 10 – Inégalité triangulaire

Soient x et y deux réels. On a :

$$\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

avec égalité à droite si et seulement si x et y de même signe.

On a donc $|x-y| \leq |x|+|y|$ et plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont réels : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

1.1.4 Partie entière

Définition 11 – Partie entière

Si $x \in \mathbb{R}$, on admet qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On le note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, et on l'appelle la *partie entière* de x.

Le nombre $\lfloor x \rfloor$ est donc caractérisée par : $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

On a aussi l'inégalité : $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

✎ ***Exemple.*** Si x est un réel et n un entier relatif, montrer que $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Soit x un réel fixé. Pour n un entier naturel, on lui associe les nombres décimaux $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$. Il sont appelés *approximations décimales de x de rang n.*

Proposition 12 – Approximations décimales d'un réel

Pour tout entier naturel n, $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une valeur approchée de x par défaut à la précision 10^{-n}, et $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une valeur approchée de x par excés à la précision 10^{-n}.

1.2 Définitions et généralités sur les suites réelles

Définition 13 – Suite réelle

Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

L'ensemble des suites réelles peut donc se noter $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ou encore $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Notations : pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est noté u_n.
La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou plus simplement (u_n).

⚠ Attention : il ne faut pas confondre le réel u_n et la suite (u_n).

Pour ne pas faire cette confusion, on note parfois la suite u sous la forme $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ (comme une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$).

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être définie de trois manières :
- explicitement : on donne l'expression de u_n en fonction de la variable n ;
- implicitement : u_n est définie comme l'unique solution d'une équation dépendant de la variable n ;
- par récurrence : on donne les premiers termes, puis une formule permattant de calculer u_n en fonction de u_{n-1}, u_{n-2}, …, u_0.

✎ ***Exemple.*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

✎ ***Exemple.*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = x + n + 1$.

✎ ***Exemple.*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Définition 14 – Opérations sur les suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
1. **Addition.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **Multiplication par un réel.** Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. **Multiplication.** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 15 – Règles de calcul

Les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Définition 16 – Suite définie à partir d'un certain rang

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite réelle définie à partir du rang n_0 toute application $u : [\![n_0, +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$. Cette suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

✎ ***Exemple.*** $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Définition 17 – Propriété vraie à partir d'un certain rang

Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang (a.p.c.r.) lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

1.3 Propriétés des suites réelles

Définition 18 – Suites majorée, minorées, bornées

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *minorée* lorsqu'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
3. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* lorsqu'il existe deux réels m et M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

⚠ Les nombres m et M **ne doivent pas** dépendre de n.

Théorème 19 – Caractérisation des suites bornées

On a :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \Longleftrightarrow \left(|u_n|\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ majorée}$$

✎ ***Exemple.*** La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 20 – Suites monotones

1. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
2. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
3. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.
4. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

✎ ***Exemple.*** Une suite est stationnaire si, et seulement si, elle est à la fois croissante **et** décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

⚠ Attention : en général une suite **n'est pas monotone**, c'est-à-dire ni croissante ni décroissante.

Définition 21 – Suites strictement monotones

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante* lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.

On définit de même les notions de suites strictement décroissantes, puis strictement monotone. On peut aussi définir ces notions à partir d'un certain rang.

Pour les suites on ne s'intéresse généralement pas à leur monotonie stricte, mais seulement à leur monotonie au sens large (c'est une différence notable avec l'étude des fonctions numériques).

Étude pratique de la monotonie d'une suite (u_n) :

1. *On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il ne dépend pas de n à partir d'un rang n_0 alors (u_n) est monotone à partir du rang n_0.*
   Plus précisément si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.

2. *Autre méthode, utilisée si l'expression de u_n comporte beaucoup de produits.*

   (a) *Si $u_n > 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :*
   – *si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;*
   – *si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.*

   (b) *Si $u_n < 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :*
   – *si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 ;*
   – *si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0.*

✎ ***Exemple.*** Étudier la monotonie des suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Convergence ou divergence d'une suite

Définition 22 – Suite convergente

On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Dans cette définition on peut remplacer $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$, sans en changer le sens.

De plus $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ signifie que $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$: donc a.p.c.r. u_n est « aussi proche que l'on veut » de ℓ.

Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de ε. Parfois on le note $n_0(\varepsilon)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

⚠ La plupart du temps, une suite n'a pas de limite, et on ne peut donc pas utiliser la notation $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans un raisonnement sans avoir prouvé auparavant son existence. Pour éviter ce genre d'erreur on utilisera de préférence la notation $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ qui ne fait pas apparaître le symbole $\lim u_n$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

✎ ***Exemple.*** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire converge vers u_0.

⚠ Attention : la limite ne doit pas dépendre de n.
Par exemple on ne peut pas dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{n}$, cela n'a aucun sens !

Théorème 23 – Unicité de la limite

Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Définition 24 – Suite divergente

Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Définition 25 – Limite $+\infty$

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$

On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dans cette définition on peut remplacer $u_n \geq A$ par $u_n > A$, sans en changer le sens.

Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de A. Parfois on le note $n_0(A)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

✎ ***Exemple.*** $n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On peut définir de même une suite qui a pour limite $-\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq A$$

Proposition 26 – Propriétés des suites qui ont pour limite $+\infty$ ou $-\infty$

1. Une suite qui a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ n'est pas bornée.
2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Longleftrightarrow -u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Définition 27 – Divergence de première ou seconde espèce

Les suites divergentes sont classées en deux catégories :

- une suite qui a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ est dite divergente de première espèce;
- une suite qui n'a pas de limite est dite divergente de seconde espèce.

⚠ La plupart des suites sont divergentes de seconde espèce.
Si une suite ne converge pas, on ne peut pas dire qu'elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$; à priori elle n'a pas même pas de limite!

✎ ***Exemple.*** La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (nous en verrons la preuve plus tard).

Théorème 28 – Premiers termes et nature d'une suite

En modifiant un nombre fini de termes d'une suite (u_n), on ne change pas sa nature (ie le fait qu'elle soit convergente ou divergente).
Dans le cas où la suite est convergente, on ne modifie pas non plus la valeur de sa limite.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Lemme 29 – La bornitude commence dès le rang 0

Une suite bornée a.p.c.r. est bornée à partir du rang 0.

Théorème 30 – Convergence et bornitude

Une suite convergente est bornée.

⚠ La réciproque est fausse : une suite bornée n'est en général pas convergente, comme le montre l'exemple de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par contre, on verra qu'une suite **monotone et bornée** converge.

Par contraposée, on obtient qu'une suite non bornée n'est pas convergente. Par exemple, une suite qui a pour limite $\pm\infty$ ne peut pas être convergente.

Le théorème suivant relie le signe de la limite avec le signe de u_n pour de grandes valeurs de n.

Théorème 31 – Limite et signe

1. Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ a.p.c.r..
2. Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell < 0$, alors $u_n < 0$ a.p.c.r..
3. Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ a.p.c.r..

⚠ Par contre si (u_n) converge vers 0 elle peut changer indéfiniment de signe.
Par exemple si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 32 – Stabilité des inégalités larges par passage à la limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..
Si (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers L, alors $\ell \leq L$.

Ce théorème est aussi appelé « prolongement des inégalités ».

⚠ Attention les inégalités *strictes* ne sont pas conservées :

$$u_n < v_n \text{ a.p.c.r. ne donne pas } \ell < L, \text{ mais seulement } \ell \leq L.$$

Contre-exemple : si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{2}{n}$ on a $\ell = L = 0$.

⚠ Si (u_n) converge vers ℓ et $u_n > 0$ a.p.c.r. alors on est sûr que $\ell \geq 0$; c'est le théorème 32.
Par contre il est possible que $\ell = 0$. La réciproque du théorème 31 est donc fausse en général.

Corollaire 33 – Localisation de la limite

Si (u_n) est a.p.c.r. à valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b, et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in [a, b]$.

2.3 Opérations sur les limites

2.3.1 Somme

Lemme 34 – Cas où une suite diverge vers $+\infty$

Si (u_n) est une suite minorée et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Théorème 35 – Somme de limites

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$
4. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
5. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

⚠ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors on ne peut absolument rien dire de général sur la limite de la suite $(u_n + v_n)$. On dit que $\infty - \infty$ est une *forme indéterminée*.

Par passage à l'opposé, on obtient les résultats sur les différences de limites.

Corollaire 36 – Différence de limites

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell'$
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n - v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
4. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
5. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

✎ ***Exemple.*** On suppose que les suites (u_n) et $(u_n + v_n)$ convergent. Montrer que la suite (v_n) converge.

⚠ En général $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ne donne pas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$; il faudrait en effet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ existent !
Contre-exemple : $u_n = v_n = (-1)^n$.

2.3.2 Produit

Lemme 37 – Cas où une suite diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$

On suppose que (u_n) est minorée a.p.c.r. par un réel $\rho > 0$.

1. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

⚠ Si (u_n) est minorée a.p.c.r. par un réel $\rho > 0$, alors elle est aussi minorée à partir du rang 0, mais le minorant n'est peut-être plus strictement positif (par exemple si $u_n = n - 5$).

Théorème 38 – Produit de limites

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$
4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
6. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

⚠ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $-\infty$, alors on ne peut absolument rien dire de général sur la limite de la suite $(u_n v_n)$. On dit que $0 \times \infty$ est une *forme indéterminée*.

✎ ***Exemple.*** Déterminer la limite de $(n^2 - n)$.

2.3.3 Passage à l'inverse

Définition 39 – Notations ℓ^+ et ℓ^-

Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

1. Lorsque $u_n > \ell$ a.p.c.r. et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on le note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^+$
2. Lorsque $u_n < \ell$ a.p.c.r. et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on le note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^-$

✎ ***Exemple.*** On peut écrire $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$

Théorème 40 – Inverse d'une limite

Soit ℓ un réel.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$
4. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$
5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$

2.3.4 Quotient de limites

Théorème 41 – Quotient de limites

Soient ℓ et ℓ' deux réels.

1. (a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell'}$

   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$

   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \neq 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell < 0 \end{cases}$

   (c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $-\infty$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. (a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell' > 0 \\ -\infty \text{ si } \ell' < 0 \end{cases}$

   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

3. (a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ avec $\ell' \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty \text{ si } \ell' > 0 \\ +\infty \text{ si } \ell' < 0 \end{cases}$

   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^+$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

   Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0^-$, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

⚠ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors on ne peut absolument rien dire de général sur la limite de la suite $\frac{u_n}{v_n}$. On dit que $\frac{0}{0}$ est une *forme indéterminée*.

⚠ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $-\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $-\infty$, alors on ne peut absolument rien dire de général sur la limite de la suite $\frac{u_n}{v_n}$. On dit que $\frac{\infty}{\infty}$ est une *forme indéterminée*.

✎ ***Exemple.*** Déterminer la limite de $\dfrac{n^3+n+1}{n^2+1}$ et $\dfrac{n^2-1}{n^2+1}$.

2.3.5 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\} = [-\infty, +\infty]$. L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé *droite numérique achevée*.

On prolonge partiellement l'addition à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout réel x :

$$x + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad x + (-\infty) = -\infty$$

ainsi que :

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

⚠ L'opération $(+\infty) + (-\infty)$ n'est pas définie.

On prolonge partiellement la multiplication à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant, pour tout réel x non nul :

$$x \times (+\infty) = \begin{matrix} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{matrix} \quad \text{et} \quad x \times (-\infty) = \begin{matrix} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{matrix}$$

ainsi que :

$$(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$

⚠ Les opérations $0 \times (+\infty)$ et $0 \times (-\infty)$ ne sont pas définies.

Enfin on prolonge la relation d'ordre $\leq$ en posant, pour tout réel x :

$$-\infty \leq x \qquad x \leq +\infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq +\infty$$

2.3.6 Composition de limites

Théorème 42 – Composition d'une fonction avec une suite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I et (u_n) une suite réelle telle que $u_n \in I$ a.p.c.r..
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{R}$ alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

En particulier la valeur absolue est compatible avec la notion de limite : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |a| \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f est *continue* sur l'intervalle I et si $a \in I$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $a \in I$ donne $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

⚠ Ceci est faux si $a \notin I$ (ce qui est possible si a est une borne de l'intervalle I).

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} \times \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

⚠ En général $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} \neq \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la fonction sin n'a pas de limite en $+\infty$.

2.4 Existence de limites à l'aide d'inégalités

Théorème 43 – Théorème de convergence par encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ.
Alors (v_n) converge vers ℓ.

Ce théorème porte aussi le nom de *théorème des gendarmes*.

⚠ Ne pas le confondre avec le théorème de prolongement des inégalités larges. Dans le théorème de convergence par encadrement, on montre l'existence de la limite de (v_n), alors que dans l'autre théorème c'est une des hypothèses de départ.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\sin n)^{1/n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+\sqrt{k}}$.

La difficulté de ce théorème, c'est qu'il nécessite deux inégalités bien choisies pour pouvoir conclure. Dans le cas où on peut deviner la valeur de la limite cherchée, on utilise le résultat suivant qui ne demande qu'une seule inégalité.

Lemme 44 – Suites convergentes et valeur absolue

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff (u_n-\ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
2. On a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff |u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc si $\ell \in \mathbb{R}$, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff |u_n-\ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème 45 – Théorème de convergence par majoration de l'erreur

Soit ℓ un réel et soient (u_n) et (α_n) deux suites réelles telles que $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ a.p.c.r., et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On a alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\sin n}{n+1}$.

Ce théorème est aussi très pratique pour prouver la convergence de suites définies par une somme ou par une intégrale.

✎ ***Exemple.*** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{n^2+k}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

✎ ***Exemple.*** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cos(nt)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On en déduit aussi le corollaire suivant qui est facile d'utilisation en pratique.

Corollaire 46 – Produit d'une suite bornée et d'une suite convergente vers 0

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que (u_n) est bornée et (v_n) est convergente vers 0.
Alors $\xrightarrow[n\to+\infty]{} u_n v_n = 0$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

Pour une limite infinie, une seule inégalité suffit.

Théorème 47 – Théorème de divergence par minoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r., et (u_n) diverge vers $+\infty$.
Alors (v_n) diverge elle aussi vers $+\infty$.

Théorème 48 – Théorème de divergence par majoration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r., et (v_n) diverge vers $-\infty$.
Alors (u_n) diverge elle aussi vers $-\infty$.

✎ ***Exemple.*** Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{n}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2.5 Limite des suites monotones

2.5.1 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Dans tout ce paragraphe, A est une partie de $\mathbb{R}$ supposée non vide.

Définition 49 – Partie majorée

Un réel M est un *majorant* de la partie A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
Si A admet au moins un majorant, on dit que A est une partie *majorée*.

De même on dit qu'un réel m est un minorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ m \leq x$. Si A admet au moins un minorant, on dit que A est une partie minorée.

On dit que A est *bornée* lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x \leq M$.

✎ ***Exemple.*** $[0,1[$ est minorée par 0 et majorée par 1.

Noter qu'une partie majorée admet une infinité de majorants : si M est un majorant, tout réel plus grand que M est un autre majorant.

Proposition 50 – Partie bornée et valeur absolue

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide : A est bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ |x| \leq M$.

Définition 51 – Maximum

Un réel b est un *maximum* de A lorsque $b \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de A : $\forall x \in A,\ x \leq b$.
S'il existe, le maximum est unique et est noté : $b = \max A$. On l'appelle aussi le plus grand élément de A.

De même, un réel a est un minimum de A lorsque $a \in A$ $\boxed{\text{et}}$ a est un minorant de A : $\forall x \in A$, $a \leq x$. S'il existe, le minimum est unique et est noté : $a = \min A$.On l'appelle aussi le plus petit élément de A.

Théorème 52 – Cas d'une partie finie et non vide

Si A est une partie finie et non vide, alors elle admet un maximum et un minimum.

✎ ***Exemple.*** $[0,1[$ admet pour minimum 0 et n'a pas de maximum.

Si A est une partie infinie, on vient de voir que même si elle est bornée, elle peut ne pas avoir de maximum. Pour palier ce défaut on introduit une notion plus subtile.

Définition 53 – Borne supérieure

Si l'ensemble des majorants de A, noté $\mathscr{E}_A = \{M \in \mathbb{R} / \ \forall x \in A,\ x \leq M\}$, est non vide et admet un plus petit élément b, alors b est appelé borne supérieure de A, notée $\sup A$.
$\sup A$ est donc *le plus petit majorant* de A.

Le théorème suivant est fondamental et sera admis.

Théorème 54 – Théorème fondamental de la borne supérieure

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors $\sup A$ existe.

✎ ***Exemple.*** $\sup[0,1[= 1$.

⚠ En général $\sup A$ n'est pas un élément de A.

En particulier A est majorée par $\sup A$: $\forall x \in A,\ x \leq \sup A$.

Le fait que $\sup A$ soit *le plus petit majorant* de A s'utilise de la façon suivante : si M est un réel tel que $\forall x \in A,\ x \leq M$, alors $\sup A \leq M$.

⚠ Dans le raisonnement précédent, on n'a pas pu choisir que $x = \sup A$ puisqu'on a vu qu'en général $\sup A$ n'est pas un élément de A.

On a en fait deux possibilités pour partie A majorée et non vide :

- si $\sup A$ appartient à A alors A admet un maximum égal à $\sup A$;
- sinon A n'admet pas de maximum.

On définit de même $\inf A$ comme étant *le plus grand minorant* de A. On est assuré de son existence dès que A est une partie *non vide* et *minorée*.

✎ ***Exemple.*** Soient A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$. Montrer que :

- si B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$;
- si B est minorée, alors A est minorée et $\inf B \leq \inf A$.

2.5.2 Limite des suites monotones

Théorème 55 – Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_n) croissante a.p.c.r. :
   - si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \lim u_n$;
   - si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On suppose (u_n) décroissante a.p.c.r. :
   - si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}, \lim u_n \leq u_n$;
   - si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Retenir qu'*une suite monotone a toujours une limite*, finie ou infinie.

Important. Ce théorème permet d'étudier la limite de suite dont on ne connaît pas une expression du terme général.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En exploitant l'inégalité $k! \geq 2^{k-1}$, montrer que la suite (u_n) est convergente.

✎ ***Exemple.*** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit x_n comme étant l'unique solution de l'équation $nx + \ln x = 0$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

Définition 56 – Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :

(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante a.p.c.r. ;

(ii) $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Sous les conditions (i) et (ii), on a $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..

Les suites adjacentes donnent un cadre très simple pour utiliser le théorème de la limite monotone, via le théorème suivant.

Théorème 57 – Théorème des suites adjacentes

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite.

✎ ***Exemple.*** Les approximations décimales d'un réel forment deux suites adjacentes qui convergent vers ce réel. En particulier tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $b_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

2.6 Suites extraites

Définition 58 – Suite extraite

Soit (u_n) une suite réelle. On appelle *suite extraite* de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

L'application φ est souvent appelée *extractrice*.

✎ ***Exemple.*** $(u_{n-1})_{n\geq1}$, (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

Théorème 59 – Limite des suites extraites

Si (u_n) admet une limite finie ou infinie alors toute suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ admet la même limite.

En particulier les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite que (u_n).

⚠ Si (u_n) est convergente on obtient donc que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Mais la réciproque est fausse, on peut avoir $(u_{n+1} - u_n)$ qui converge vers 0 et (u_n) divergente. Prendre par exemple $u_n = \ln(n)$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)$ n'a pas de limite, ie qu'elle est divergente de seconde espèce.

On a une réciproque dans le cas des suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Théorème 60 – Théorème des suites extraites recouvrantes

Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont une même limite, alors la suite (u_n) admet la même limite.

En particulier si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, alors la suite (u_n) est convergente.

✎ ***Exemple.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

2.7 Brève extension aux suites complexes

Une suite complexe est une application $z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. On la note $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des suites réelles peut se noter $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. ou encore $\mathscr{S}(\mathbb{C})$.

On dira que la suite complexe (z_n) *converge* vers le nombre complexe $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall n \geq n_0, |z_n - \ell| \leq \varepsilon$$

C'est donc la même définition que pour une suite réelle, mais la *valeur absolue* est remplacée par le *module*.

On peut se ramener à des suites réelles en utilisant les parties réelles et imaginaires : la suite complexe (z_n) converge vers ℓ si, et seulement si, les suites réelles $\left(\mathrm{Re}(z_n)\right)$ et $\left(\mathrm{Im}(z_n)\right)$ convergent respectivement vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(\ell)$.

✎ ***Exemple.*** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{i2\pi/n} = 1$.

De même on dira que la suite complexe (z_n) est *bornée* lorsqu'il existe un réel M positif tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |z_n| \leq M$$

✎ ***Exemple.*** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $z_n = e^{in}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq 1$ donc (z_n) est bornée.

Comme pour les suites réelles on peut montrer que pour une suite complexe convergente, il y a *unicité de la limite*. De plus toute suite complexe convergente est *bornée*.

D'autre part les opérations compatibles avec les suites convergentes réelles le sont aussi avec les suites complexes, à savoir :

- *Combinaison linéaire.* Si (z_n) et (z'_n) sont deux suites complexes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', et si α et β sont deux nombres complexes, alors la suite complexe $(\alpha.z_n + \beta.z'_n)$ converge vers le complexe $\alpha\ell + \beta\ell'$.
- *Produit.* Si (z_n) et (z'_n) sont deux suites complexes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', alors la suite complexe $(z_n.z'_n)$ converge vers le complexe $\ell\ell'$.
- *Quotient.* Si (z_n) et (z'_n) sont deux suites complexes qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' avec $\ell' \neq 0$, alors la suite complexe (z_n/z'_n) converge vers le complexe ℓ/ℓ'.
- *Composition.* Si (z_n) est une suite complexe qui converge vers ℓ et si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application telle que $\lim\limits_{z\to\ell} f(z) = a$, alors la suite $\big(f(z_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

Le dernier point a pour conséquence le résultat suivant : si (z_n) converge vers ℓ alors $\overline{z_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{\ell}$ et $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Connaître les propriétés générales des suites.

- ✪ Écrire les propriétés de monotonie ou de bornitude avec des quantificateurs.
- ✪ Connaître les théorèmes sur les suites convergentes.
- ✪ Utiliser le théorème de la limite monotone ou le théorème des suites adjacentes pour étudier la convergence d'une suite.

➥ Étudier une suite.

- ✪ Déterminer si elle est monotone.
- ✪ Calculer sa limite par opérations sur les limites.
- ✪ Calculer sa limite par encadrement.
- ✪ Étudier sa limite à l'aide de suites extraites.

➥ Connaître la définition et les propriétés des notions de borne supérieure ou inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$.

4 Exercices

Propriétés de $\mathbb{R}$

EXERCICE 1. Quelques inégalités

Montrer que :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |ab| \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

EXERCICE 2. Partie entière

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Peut-on relier $\lfloor x+y \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$?
2. Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

EXERCICE 3. Borne supérieure

Soient A et B deux parties non vides et bornées.

1. Vérifier que $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent et les exprimer en fonction de $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$.
2. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Mêmes questions avec $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$.

EXERCICE 4. Une inégalité classique

1. Vérifier que : $\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$$

et en déduire que :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Propriétés générales des suites

EXERCICE 5. Propriétés des suites convergentes

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' tels que $\ell < \ell'$. Montrer que $u_n < v_n$ a.p.c.r..
2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$ et a.p.c.r. $0 \le u_n \le 1$ et $0 \le v_n \le 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et déterminer leur limite.
3. (a) Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\max(a,b) = \dfrac{1}{2}\big(a+b+|a-b|\big)$.

   (b) En déduire que si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes alors la suite $\big(\max(u_n, v_n)\big)$ est elle aussi convergente.
4. Soit (u_n) une suite réelle à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et convergente. Montrer qu'elle est stationnaire.

EXERCICE 6. Principe de comparaison logarithmique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiants : $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \overset{\text{existe}}{=} \ell$, avec $0 \leqslant \ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Pour x réel déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

EXERCICE 7. Convergence en moyenne de Césaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
La réciproque est-elle vraie ?

Utilisation du théorème de la limite monotone

EXERCICE 8. Convergence en moyenne de Césaro dans le cas d'une suite monotone

Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Établir que $\forall n \geq 1,\ v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que (v_n) converge vers ℓ.

EXERCICE 9. Divergence de la série harmonique

On pose, pour tout $n \geq 1$: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Etablir que, pour tout $n \geq 1$: $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. Etudier la monotonie de la suite (S_n).
3. Déterminer la limite de (S_n).

EXERCICE 10. Irrationnalité de e

Soit $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} + \dfrac{1}{n.n!} = a_n + \dfrac{1}{n.n!}$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.

On admet que leur limite commune est e. On désire montrer que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $\mathrm{e} = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $a_q < \mathrm{e} < b_q$ puis obtenir une contradiction.

EXERCICE 11. Moyenne arithmético-géométrique

1. Pour $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, établir $2\sqrt{ab} \leq a + b$.

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$. On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

3. Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
4. Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $(a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$.

EXERCICE 12. Suite implicite

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation : $x^n + x - 1 = 0$, admet une unique solution $x > 0$, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est majorée par 1.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n \geqslant 1}$.
4. Montrer qu'il est impossible que $(x_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une limite $l < 1$.
5. Conclure que : $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

EXERCICE 13. Suites récurrentes couplées

Soient $0 < b < a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement positives.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
3. Établir que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante.
4. (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

Étude de suites

EXERCICE 14. Étude de monotonie

Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$ 2. $u_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$ 3. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$ 4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

EXERCICE 15. Limite par encadrement

1. Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$$

2. (a) Vérifier que : $\forall x>0,\ x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.

   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

3. Si x est un réel étudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{\lfloor (n+1)^2 x\rfloor}{n^2-n}$.

EXERCICE 16. Une suité définie avec des factorielles

On pose $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.

1. Exprimer u_n à l'aide de factorielles.
2. Montrer que (u_n) converge.
3. Soit $v_n=(n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 17. Une convergence surprenante

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire la convergence de la suite $\left(\sin\left[(3+\sqrt{5})^n\pi\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 18. Sommes des inverses de coefficients binomiaux

Soit $p\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $u_n=\dfrac{1}{\dbinom{n+p}{n}}$ et $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}u_k$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+p+2)u_{n+2}=(n+2)u_{n+1}$.
2. Montrer par récurrence $S_n=\dfrac{1}{p-1}\big(1-(n+p+1)u_{n+1}\big)$.
3. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=(n+p)u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.