Chapitre 8

Compléments sur les suites

Sommaire

1 Suites usuelles . . . 222
- 1.1 Suites récurrentes d'ordre 1 . . . 222
- 1.2 Suites arithmétiques . . . 223
- 1.3 Suites géométriques . . . 224
- 1.4 Suites arithmético-géométriques . . . 224
- 1.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 . . . 225

2 Comparaison des suites . . . 226
- 2.1 Notations de Landau . . . 226
- 2.2 Suites équivalentes . . . 227
- 2.3 Propriétés conservées par équivalence . . . 228
- 2.4 Opérations sur les équivalents . . . 229
- 2.5 Comparaison des suites usuelles . . . 230

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre . . . 233

4 Exercices . . . 234

1 Suites usuelles

1.1 Suites récurrentes d'ordre 1

On se donne f une fonction numérique et a un réel. On appelle suite *récurrente autonome d'ordre* 1 une suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 = a$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

✎ ***Exemple.*** $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ un + 1 = \ln(1 + u_n)$.

La fonction f est appelée *itératrice*. Le terme autonome sert à préciser que la fonction f ne dépend pas de n.

✎ ***Exemple.*** La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ un + 1 = n + u_n$ une suite récurrente d'ordre 1 non autonome.
Les suites récurrentes autonomes d'ordre 1 sont de nature très complexes, voir chaotiques. Le fait que f soit monotone ou qu'elle ait une limite en $+\infty$ ne donne pas de conclusion évidente sur la suite (u_n).

Une première difficulté est de montrer que la suite *existe*, puisque dans la définition on définit la suite en fonction d'elle-même, ce qui peut poser problème.

✎ ***Exemple.*** Si $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n)$, on trouve $u_1 = 0$ donc u_2 n'est pas défini. Cette suite n'existe pas ; on dit qu'elle n'est pas *bien définie*.

Pour être sur de l'existence de la suite (u_n) on utilise le théorème suivant.

Théorème 1 – Définition par récurrence

On suppose que I est un intervalle de E stable par f : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.
Pour tout $a \in I$, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
De plus elle vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

L'existence se démontre grâce à la théorie des ensembles.

L'unicité se démontre très facilement par récurrence.

On peut noter que :

$$u_n = \underbrace{\big(f \circ f \circ \cdots \circ f\big)}_{\text{n fois}}(u_0)$$

donc pour une fonction f donnée, c'est le premier terme u_0 qui va déterminer le comportement de toute la suite. Ceci semble contredire le fait que la nature d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes, mais il n'en est rien : pour une suite récurrente autonome d'ordre 1, si on modifie le premier terme, alors on modifie du même coup tous les termes de la suite, et il peut donc arriver qu'on change sa nature.

✎ ***Exemple.*** La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ est bien définie.

Pour étudier la limite de ce genre de suite, on utilise principalement le *théorème de la limite monotone*. On dispose aussi du théorème suivant qui permet de savoir vers quelle(s) valeur(s) la suite peut converger.

Théorème 2 – Limite finie de la suite et points fixes de l'itératrice

On suppose que I est un intervalle de $\mathbb{E}$ stable par f : $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = a \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$
Si (u_n) converge vers ℓ, si $\ell \in I$, et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

✎ ***Exemple.*** Étudier l'éventuelle limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

✎ ***Exemple.*** Étudier l'éventuelle limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}$.

⚠ Si (u_n) converge vers ℓ mais $\ell \notin I$ (ℓ est alors une borne de l'intervalle I), alors il est possible que ℓ ne soit pas un point fixe de f.

1.2 Suites arithmétiques

Définition 3 – Suite arithmétique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 4 – Formules autour des suites arithmétiques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$;
   Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} u_k &= (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}\\ &= \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $u_0 = 0$ et $r = 1$ donnent $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$. On retrouve les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$$

1.3 Suites géométriques

Définition 5 – Suite géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 6 – Formules autour des suites géométriques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p q^{n-p}$ (si $n < p$ il faut supposer $q \neq 0$).
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \text{ ie } |q| < 1 \end{cases}$
   et $\left(q^n\right)$ n'a pas de limite si $q \leq -1$.
3. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a pour $q \neq 1$:
   $$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$
   et pour $q = 1$:
   $$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_0 = \text{nombre de termes} \times \text{premier terme}$$

⚠ Si (x_n) est une suite à valeurs dans $]-1,1[$, on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n = 0$. Par exemple $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right)$.

1.4 Suites arithmético-géométriques

Définition 7 – Suite arithmético-géométrique

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b$.

Remarquons que si $a = 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, et si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Dans la suite, on supposera que $a \neq 1$.

On va calculer le terme général u_n en fonction de n, mais cette fois la formule est trop compliquée pour être apprise, il faut donc uniquement retenir la méthode utilisée.

Méthode : on commence par déterminer le point fixe $\ell \in \mathbb{R}$ associé à la relation de récurrence. Il vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

Ensuite on définit une suite auxiliaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n - \ell$. Cette suite est alors géométrique de raison a, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(x_n + \ell) + b - \ell = ax_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{=0} = ax_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n$ puis $u_n = x_n + l = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$.

On peut alors très facilement en déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

✎ ***Exemple.*** On donne $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$. Donner une expression de u_n.

1.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 8 – Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Remarquons que si $b = 0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

On appelle *équation caractéristique* associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = az + b$.

Théorème 9 – Calcul du terme général u_n en fonction de n

On note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E).

1. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu)r_0^n$$
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ (E) a deux racines complexes pures conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n\big(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta)\big)$$

✎ ***Exemple.*** Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$: $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}$.

Dans le cas où a et b sont deux nombres **complexes**, on obtient :

1. $\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ (E) a deux racines **complexes** distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine complexe r_0. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$$

2 Comparaison des suites

Dans ce paragraphe nous allons présenter un cadre mathématique qui va permettre de faire des approximations de manière rigoureuse.

(u_n) et (v_n) seront deux suites réelles. Pour simplifier les définitions nous supposerons que $v_n \neq 0$ a.p.c.r..

2.1 Notations de Landau

Définition 10 – Suite négligeable devant une autre suite

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, et on dira que u_n est un « petit o » de v_n.

On dit parfois aussi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **prépondérante** devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ La notation $o(v_n)$ seule n'a pas de sens !
Elle ne désigne pas une suite fixée, mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ ne donnent pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On peut le vérifier avec le contre-exemple $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = n^3$.

✎ ***Exemple.*** $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

✎ ***Exemple.*** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ signifie que (u_n) converge vers 0.

Proposition 11 – Règles de calcul pour « le petit o »

On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annulent pas a.p.c.r..

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times b_n)$
3. Somme. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$
4. Multiplication par une constante. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$
5. Multiplication par une suite. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times w_n)$

Définition 12 – Suite dominée par une autre suite

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, et on dira que u_n est un « grand o » de v_n.

Les remarques sur la notation $o(v_n)$ sont encore valables pour la notation $\mathcal{O}(v_n)$.

✎ ***Exemple.*** $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$ signifie que la suite (u_n) est bornée.

Proposition 13 – Lien entre « le petit o » et « le grand o »

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

2.2 Suites équivalentes

Définition 14 – Suite équivalente à une autre suite

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

✎ ***Exemple.*** $\sqrt{n^2+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Proposition 15 – Propriétés de la relation ∼

La relation ∼ est une *relation d'équivalence* sur l'ensemble des suites réelles qui ne s'annulent pas a.p.c.r..

La propriété de symétrie donne que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

Théorème 16 – Lien entre la relation ∼ et « le petit o »

Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une suite équivalente à une somme.

Corollaire 17 – Équivalent d'une somme

Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$$

Ce résultat indique que dans une somme on garde le terme « prépondérant ». Cela permet de faire disparaître facilement une forme indéterminée.

✎ ***Exemple.*** $n - \ln(n) + 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Théorème 18 – Composition d'un « petit o » par une suite équivalente

Pour trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annulent pas a.p.c.r. :
si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$.

2.3 Propriétés conservées par équivalence

Théorème 19 – Équivalent et signe

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe au sens strict à partir d'un certain rang.

Théorème 20 – Équivalent et limite

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Le dernier point est très important : les suites dont il sera difficile de trouver un équivalent sont les suites qui convergent vers 0, ou qui divergent vers $\pm\infty$.

⚠ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on ne peut pas en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

⚠ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, on ne peut pas en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_n - v_n\right)$ (on peut tomber sur une forme indéterminée).
Prendre par exemple $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = n^2$.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \ln(n) + 2\right)$.

2.4 Opérations sur les équivalents

Proposition 21 – Règles de calcul pour la relation $\sim$

On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne s'annulent pas a.p.c.r..

1. <u>Valeur absolue</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. <u>Produit</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$.
3. <u>Puissance</u>. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que les suites $(u_n)^\alpha$ et (v_n^α) soient bien définies a.p.c.r. : $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$. En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $\sqrt{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$.
4. <u>Inverse</u>. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. <u>Quotient</u>. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{a_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{v_n}$.

⚠ Par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.

• **Somme**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ne donnent pas $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + b_n$.

• **Composition par une fonction**

Si f est une fonction, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.

En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne ni $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n}$ et ni $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

• **Puissance dépendante de n**

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $u_n^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\alpha_n}$.

Noter aussi que $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, mais en général on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent simple de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(n+\ln(n))^2$, de $\dfrac{\ln(n)+1}{n+\sqrt{n}}$ et de $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^3+1}}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

2.5 Comparaison des suites usuelles

On rappelle les limites usuelles suivantes :

• $n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

• $n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

• $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

• $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta > 0 \\ 1 & \text{si } \beta = 0 \\ 0 & \text{si } \beta < 0 \end{cases}$

• $\mathrm{e}^{\gamma n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma > 0 \\ 1 & \text{si } \gamma = 0 \\ 0 & \text{si } \gamma < 0 \end{cases}$

• $a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < a < 1 \end{cases}$

Théorème 22 – Équivalent et polynômes

Soit P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où p et q sont deux entiers naturels tels que $q \leq p$ avec $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$.

Alors $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$ (plus haut degré), et $P\left(\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_q}{n^q}$ (plus bas degré).

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2}{(2n+1)(2n+2)(n+3)}$.

Théorème 23 – Comparaison de n^α, $n!$ et a^n

On se donne trois réels α, β et a.

1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$, ou encore $\dfrac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
   Et si $a > 1$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right)$.
3. $n! \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $a > 1$: $n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{2^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{n^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

La formule de Stirling donne un équivalent dee $n!$: $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. Mais elle n'est pas au programme de PCSI.

Théorème 24 – Croissances comparées

On se donne trois réels α, β et γ.

1. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
   Et plus généralement, pour $\alpha > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
2. $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^n\right)$
   Et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$
   De manière équivalente $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
   et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $\mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$
3. Si $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \mathrm{e}^{\gamma n}$

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{\ln(n)}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n^2\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 25 – Équivalents usuels

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

1. $\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
2. $\tan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
3. $\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
4. $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1-\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x_n^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^{x_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
6. Pour $\alpha\in\mathbb{R}$: $(1+x_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $(1+x_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha x_n$
7. $\tan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1)-\ln(n)$, de $(n+1)\times\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ et de $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n^2}$.

✎ ***Exemple.*** Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0, donner un équivalent simple de $\arccos(x_n)$ et de $\arcsin(x_n)$.

Terminons par un résultat de non existence de limite.

Théorème 26 – Limite de $\cos n$, $\sin n$ et $\tan n$

Les suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite lorsque $n\to+\infty$ (elles sont divergentes de seconde espèce).

⚠ $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n)$ n'existe pas, mais on ne peut pas en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{n}$ n'existe pas. En effet, par encadrement, on montre que $\dfrac{\sin(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Calculer le terme général d'une suite récurrent usuelle.

- ✪ Suites arithmétiques.
- ✪ Suites géométriques.
- ✪ Suites arithémtico-géométriques.
- ✪ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.

➥ Calculer la limite d'une suite en la comparant à une suite usuelle à l'aide d'équivalents ou de croissances comparées.

➥ Trouver un équivalent d'une suite.

- ✪ Utiliser les équivalents usuels et les opérations sur les équivalents.
- ✪ Faire une conjecture et la prouver en revenant à la définition de deux suites équivalentes.

4 Exercices

Suites usuelles

EXERCICE 1. Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.
   On déterminera aussi ses éventuels points fixes.
2. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
3. On considère les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Étudier leur monotonie.
4. Déterminer leur éventuelle limite.
5. Conclure sur la limite de (u_n).

EXERCICE 2. Opérations sur les suites convergentes

Etudier la limite des suites définies par :

1. $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$
2. $v_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
3. $w_n = n^2 - n\cos(n) + 2$
4. $s_n = \dfrac{2^n + n}{2^n}$
5. $t_n = n^2 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \sin(n!)$
6. $x_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - \ln\left(n^3\right)}$
7. $y_n = \dfrac{\alpha^n}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3. Changements de suite

1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 2}{u_n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1$, pour $n \geq 3$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$, est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Donner u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.
   (a) Montrer que cette suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   (b) On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer qu'elle est bien définie et donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la nature de (u_n) et son éventuelle limite.

EXERCICE 4. Produit de cosinus

On pose, pour tout $n \geq 2$: $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$.

1. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
2. On pose, pour tout $n \geq 2$: $v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire u_n en fonction de n puis $\lim u_n$.

EXERCICE 5. Calcul de u_n en fonction de n

Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles suivantes :

1. $u_8 = 10$ et $u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_5 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
3. $u_{11} = 30$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$
4. $u_4 = -2$ et $u_{n+1} = -u_n + 2$
5. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$
6. $u_{10} = -1$ et $u_{n+1} = -u_n$
7. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (-1)^n u_n$
8. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$
9. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
10. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
11. $u_0 = 0$ et $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$
12. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
13. $u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{e}^4$ et $u_{n+2} \times (u_n)^4 = (u_{n+1})^4$
14. $u_0 = 1$ et $u_n = nu_{n-1} + n!$

Comparaison des suites

EXERCICE 6. Équivalents et inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
Montrer que $u_n < v_n$ a.p.c.r.. Généraliser.

EXERCICE 7. Calculs d'équivalents

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$
3. $u_n = 2^n + n^2$
4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$
9. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
10. $u_n = \ln(n+1) + \ln(n)$
11. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$

EXERCICE 8. γ la constante d'Euler

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions ϕ et ψ sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

3. Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

EXERCICE 9. Obtention d'un équivalent par encadrement

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire la limite et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

EXERCICE 10. Équivalent d'une suite définie implicitement

Pour $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation : $x - \ln(x) - n = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution supérieure ou égale à 1, notée x_n.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.