Chapitre 9

Limites et comparaison des fonctions numériques

Sommaire

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

1 Limite en un point de $\overline{R}$

1.1 Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1 – Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$

Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle *voisinage de a* tout intervalle V fermé et centré en a, ie tout intervalle du type $[a-\delta, a+\delta]$ où $\delta > 0$.

Remarquer que $x_0 \in V$.

Définition 2 – Voisinage de $+\infty$

On appelle *voisinage de* $+\infty$, tout intervalle V du type $V = [A, +\infty[$, avec $A \in \mathbb{R}$.

On définit de même les voisinages de $-\infty$: tout intervalle V du type $V =]-\infty, A]$, avec $A \in \mathbb{R}$.

Si $P(x)$ est un prédicat dépendant de x, on peut donc définir le prédicat « P(x) est vrai au voisinage de a » :

$$\exists V \text{ voisinage de } a;\ \forall x \in V \cap \mathscr{D}_f,\ \ P(x)$$

Par exemple « f est strictement positive au voisinage de $+\infty$ » s'écrit :

$$\exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in [A, +\infty[\cap \mathscr{D}_f,\ \ f(x) > 0$$

« f change de signe au voisinage de 1 » s'écrit :

$$\exists \delta > 0,\ \exists (x_1, x_2) \in \left(]1-\delta, 1+\delta[\cap \mathscr{D}_f\right)^2;\ \ f(x_1) \times f(x_2) \leq 0$$

Proposition 3 – Intersection de voisinages

Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et si V_1 et V_2 sont deux voisinages de a, alors $V_1 \cap V_2$ est encore un voisinage de a. En particulier $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

1.2 Limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathscr{D}_f$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathscr{D}_f$).

Définition 4 – Limite finie en a

On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ *pour limite en a* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0;\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I,\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

On préfèrera la notation $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ qui permet d'éviter de raisonner ou de calculer avec la limite de f en a sans avoir prouvé auparavant son existence.

Dans cette définition, on peut remplacer $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ par $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, sans en changer le sens.

D'autre part $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ signifie que $f(x) \in [\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon]$. On obtient donc une nouvelle écriture de la définition :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \exists V \text{ voisinage de } a;\ \forall x \in I \cap V,\ f(x) \in W$$

Théorème 5 – Lien entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

Si $a \in \mathscr{D}_f$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors $\ell = f(a)$.

Dans ce cas f est *continue* en a ; cette notion sera développée dans un autre chapitre.

⚠ Si $a \notin \mathscr{D}_f$, alors ℓ peut prendre toute valeur réelle.

✎ ***Exemple.*** Pour $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ vérifie :

$$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad f(0) \text{ n'existe pas car } 0 \notin \mathscr{D}_f$$

et

$$f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \sin(1) = f(1) \qquad 1 \in \mathscr{D}_f$$

⚠ Pour le moment, si $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, on n'a pas défini de notion de limite de f en 0 car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle. Ce sera fait plus loin avec la notion de limite épointée.

1.3 Limite infinie en un point $a \in \mathbb{R}$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathscr{D}_f$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \notin \mathscr{D}_f$ et $a \in \overline{I}$: a est donc une borne de I.

Définition 6 – Limite $+\infty$ en a

On dit que f admet $+\infty$ *pour limite en a* lorsque :

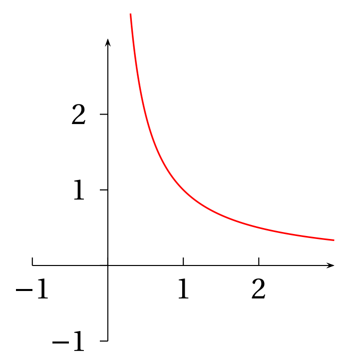
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0;\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I,\ f(x) \geq B$$

On le note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$.

De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \exists V \text{ voisinage de } a;\ \forall x \in V_g,\ f(x) \in W$$

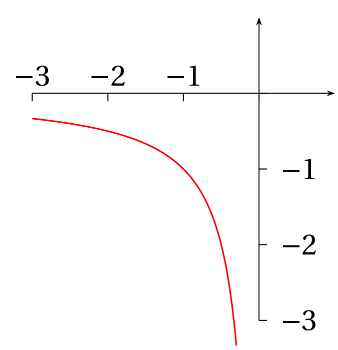
✎ ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.



On définit aussi une limite $-\infty$ en a :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0;\ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I,\ f(x) \leq B$$

✎ ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$.



1.4 Limite finie ou infinie en $\pm\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathcal{D}_f$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $+\infty$ est une borne de I.

Définition 7 – Limite finie en $+\infty$

On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ *pour limite en* $+\infty$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in [A, +\infty[\cap I,\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } \ell, \exists V \text{ voisinage de } +\infty;\ \forall x \in V,\ f(x) \in W$$

Définition 8 – Limite $+\infty$ en $+\infty$

On dit que f admet $+\infty$ *pour limite en* $+\infty$ lorsque :

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in [A, +\infty[\cap I,\ f(x) \geq B$$

On le note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De manière équivalente :

$$\forall W \text{ voisinage de } +\infty, \exists V \text{ voisinage de } +\infty;\ \forall x \in V,\ f(x) \in W$$

On définit aussi une *limite* $-\infty$ *en* $+\infty$:

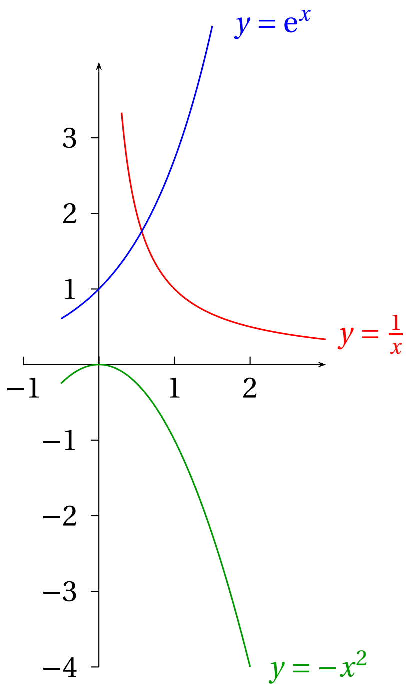
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in [A, +\infty[\cap I,\ f(x) \leq B$$

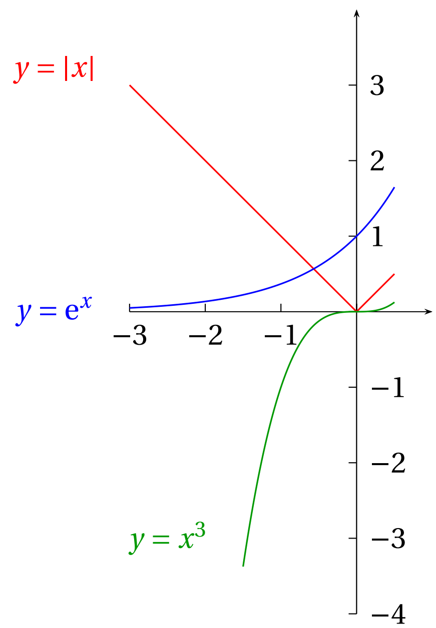
✎ ***Exemple.*** $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\left(-x^2\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

De même on définit :

- $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in]-\infty, A] \cap I,\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$
- $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in]-\infty, A] \cap I,\ f(x) \geq B$$
- $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si
$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R};\ \forall x \in]-\infty, A] \cap I,\ f(x) \leq B$$

✎ ***Exemple.*** $e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $|x| \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $x^3 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.





1.5 Propriétés des limites finies

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathcal{D}_f$ et $I \subseteq \mathcal{D}_g$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathcal{D}_f$ ou dans $\mathcal{D}_g$).

Théorème 9 – Unicité de la limite

Si f a une limite finie ℓ en a, alors la valeur de ℓ est unique.

Théorème 10 – Limite finie et bornitude

Si f a une limite finie ℓ en a, alors f est bornée au voisinage de a.

f est bornée au voisinage de a signifie qu'il existe un réel $M > 0$ et un V voisinage de a tel que, pour tout $x \in V \cap I$, $|f(x)| \leq M$. Par exemple si a est un réel :

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap \mathcal{D}_f, |f(x)| \leq M$$

Théorème 11 – Stabilité des inégalités larges

Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

⚠ Après passage à la limite, une *inégalité stricte* devient seulement une *inégalité large*.

1.6 Limites à droite, limites à gauche

Soit f une fonctions définie sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathscr{D}_f$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathscr{D}_f$).

Définition 12 – Limite à droite en a

L'éventuelle limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ de $f_{|]a,+\infty[}$ est appelée *limite à droite de f en a*.
On le note $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{\substack{x \to a\\ >}} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ ou encore $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$.

Si $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et si ℓ est finie, on la note aussi $f(a^+) = \ell$.

⚠ Ne pas confondre $f(a)$ qui est la valeur de f évaluée en a (pour $a \in \mathscr{D}_f$), et $f(a^+)$ qui est une limite lorsque $x \to a^+$ (et pour laquelle on peut avoir $a \notin \mathscr{D}_f$).

On définit de même *la limite à gauche de f en a* comme étant la limite de la fonction $f_{|]-\infty,a[}$. Si elle est finie, on la note $f(a^-)$.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

✎ ***Exemple.*** Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor \underset{x\to n^+}{\longrightarrow} n$ et $\lfloor x \rfloor \underset{x\to n^-}{\longrightarrow} n-1$.

Il est clair que si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ alors $f(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x\to a^-}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 13 – Limite épointée en a

Si f admet une limite à droite et à gauche en a, et si celles-ci sont égales , cette valeur commune est appelée *limite épointée* de a, notée $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} \ell$.

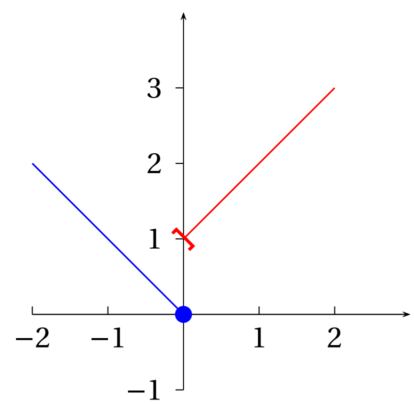
Cette notion sera particulièrement utile pour définir le nombre dérivé d'une fonction en tant que limite (épointée) d'un taux de variation.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\longrightarrow} 1$.

Différence entre limite et limite épointée.

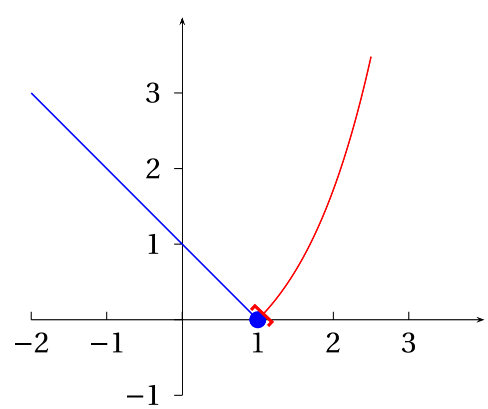
- Si $a \notin \mathscr{D}_f$: la limite épointée n'existe que si les limites à gauche et à droite en a coïncident. Dans ce cas, elle est égale à la limite.
- Si $a \in \mathscr{D}_f$: on peut avoir $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} \ell$ et la limite de f en a qui n'existe pas. Plus précisément si $\ell = f(a)$ alors les deux limites sont égales, et si $\ell \neq f(a)$ alors f n'a pas de limite en a (bien qu'elle ait même limite à gauche et à droite en a).

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

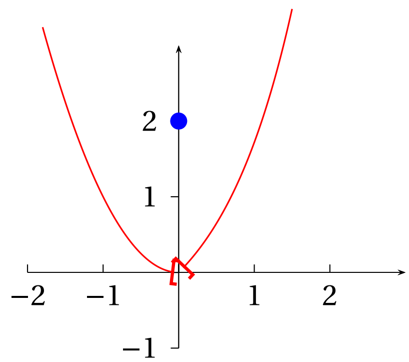


Sur cet exemple $f(0^-) = 0 \neq 1 = f(0^+)$. Pas de limite épointée en 0.

✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} 1-x \text{ si } x \leq 1 \\ \mathrm{e}^{x-1} - 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad$ Sur cet exemple $f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}}{\longrightarrow} 0$.



✎ ***Exemple.*** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



Sur cet exemple $f(x)$ n'a pas de limite en 0, bien que $f(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0$. En effet $f(0) = 2 \neq 0$.

1.7 Opérations sur les limites

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathscr{D}_f$ et $I \subseteq \mathscr{D}_g$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathscr{D}_f$ ou dans $\mathscr{D}_g$).

1.7.1 Combinaison linéaire

Théorème 14 – Somme de limites

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, et si l'opération $\ell + \ell'$ a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) + g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$

⚠ On rappelle que l'opération $\infty - \infty$ est une forme indéterminée.

Théorème 15 – Multiplication par un réel

Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et si α est un réel non nul, alors $\alpha \times f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \alpha \times \ell$

On peut de même énoncer un théorème de *différences de limites*.

1.7.2 Produit

Théorème 16 – Produit de limites

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, et si l'opération $\ell\ell'$ a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\times\ell'$

⚠ On rappelle que l'opération $0\times\infty$ est une forme indéterminée.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\big(x-\ln(x)\big)$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln(x)\right)$.

1.7.3 Passage à l'inverse

Définition 17 – Notations ℓ^+ et ℓ^-

Soit $\ell\in\mathbb{R}$.

1. Lorsque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x)>\ell$ au voisinage de a, on le note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell^+$
2. Lorsque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x)<\ell$ au voisinage de a, on le note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell^-$

Théorème 18 – Inverse d'une limite

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\in\overline{\mathbb{R}}$ et si l'opération $\frac{1}{\ell}$ a un sens dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{\ell}$

On a adopté les conventions suivantes : $\frac{1}{0^+}=+\infty$ et $\frac{1}{0^-}=-\infty$.

⚠ On rappelle que les opérations $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ sont des formes indéterminées.

On peut de même énoncer un théorème de *quotient de limites*.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

1.7.4 Composition

Théorème 19 – Composition de limites

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subseteq J$.
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t\to b]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

En Terminale, ce résultat était utilisé sous le nom de « changement de variable ». On chercher la limite de $\varphi\big(f(x)\big)$ lorsque $x \to a$. Pour cela on introduit une nouvelle variable $t = f(x)$. On détermine la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$; on la note b. On est donc ramené à déterminer la limite de $\varphi(t)$ lorsque $t \to b$.

En particulier si $a \in \mathbb{R}$:

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} \ell$$

On peut donc toujours se ramener à une limite en 0.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} |\ln x|^{1/\ln x}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\pi-2x}$.

On rappelle aussi le résultat suivant vu dans le chapitre sur les suites.

Théorème 20 – Composition d'une fonction avec une suite

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle I et (u_n) une suite réelle telle que $u_n \in I$ a.p.c.r..
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{R}$ alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

1.8 Existence de limites par inégalités

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I (donc I inclus dans $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathscr{D}_f$ ou $\mathscr{D}_g$ ou $\mathscr{D}_h$).

Théorème 21 – Théorème d'encadrement

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ et $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, et si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

La difficulté de ce théorème, c'est qu'il nécessite deux inégalités bien choisies pour pouvoir conclure. Dans le cas où on peut deviner la valeur de la limite cherchée, on utilise le résultat suivant qui ne demande qu'une seule inégalité, avec deux membres positifs.

Théorème 22 – Théorème de majoration de l'erreur

Si $\ell \in \mathbb{R}$, si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si $\left|f(x) - \ell\right| \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2-1)}{\ln(x+1)}$.

Corollaire 23 – Produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0

Si f est bornée au voisinage de a et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, alors $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour une limite infinie une seule inégalité suffit.

Théorème 24 – Théorème de minoration

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + x\sin(x)\right)$.

Théorème 25 – Théorème de majoration

Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x}$.

1.9 Limites des fonctions monotones

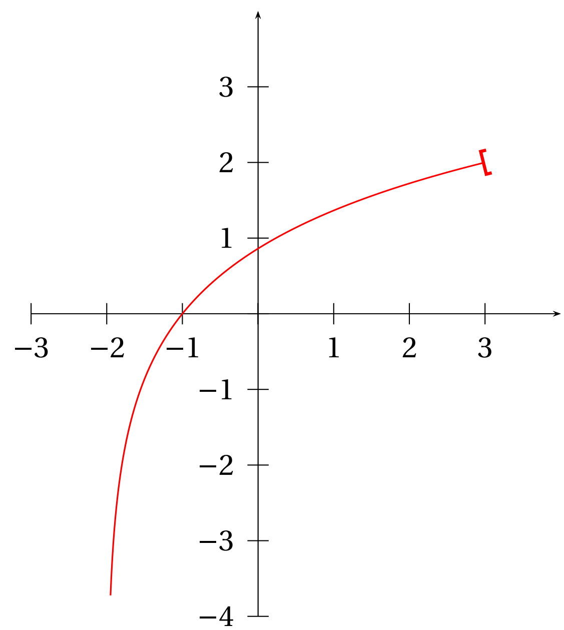
Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f une fonction définie sur $]a,b[$.

Théorème 26 – Théorème de la limite monotone pour une fonction croissante

On suppose que f est croissante sur $]a,b[$. Alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existent.
Plus précisément :

- si f est majorée sur I alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq f(b^-)$
  si f n'est pas majorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$
- si f est minorée sur I alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \geq f(a^+)$
  si f n'est pas minorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$

✎ ***Exemple.*** La figure ci-contre donne un exemple d'un fonction croissante sur $]-2,3[$ majorée mais non minorée : $f(x) \xrightarrow[x\to(-2)^+]{} -\infty$ et $f(3^-) = 2$

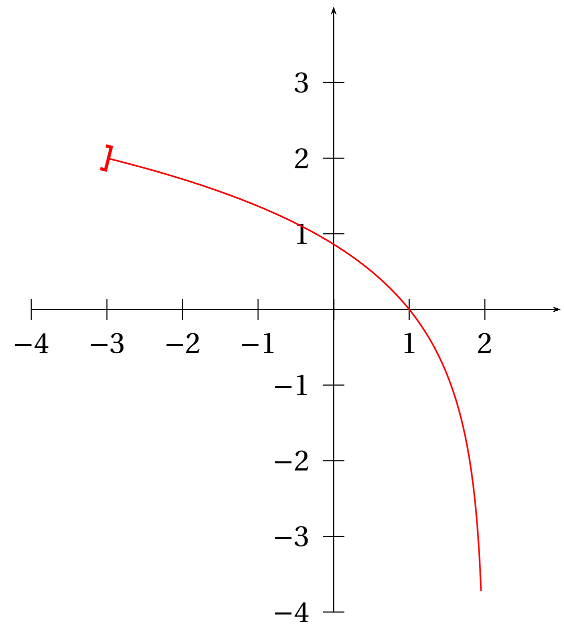


Théorème 27 – Théorème de la limite monotone pour une fonction décroissante

On suppose que f est décroissante sur $]a,b[$. Alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existent. Plus précisément :

- si f est minorée sur I alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \geq f(b^-)$
  si f n'est pas minorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} -\infty$
- si f est majorée sur I alors $\lim_{x\to a^+} f(x)$ est finie et $\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq f(a^+)$
  si f n'est pas majorée sur I, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$

✎ ***Exemple.*** La figure ci-contre donne un exemple d'une fonction décroissante sur $]-3,2[$ majorée mais non minorée : $f((-3)^+) = 2$ et $f \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} -\infty$



Corollaire 28 – Existence des limites à droite/gauche et monotonie

Si f est monotone sur un intervalle I alors en tout $a \in I$ qui n'est pas une borne de I, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existent.
De plus, on a :

- si f croissante :
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \leq \quad f(a) \quad \leq \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$
- si f décroissante :
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \leq \quad f(a) \quad \leq \quad \lim_{x\to a^-} f(x)$$

.

1.10 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soient I un intervalle supposé non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur I et à valeurs complexes.

✎ ***Exemple.*** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{x+i}{x-i}$

✎ ***Exemple.*** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

On lui aussi les *fonctions parties réelles et imaginaires*, notées $\mathrm{Re}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour tout $x \in I$:

$$\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}\big(f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}\big(f(x)\big)$$

Ce sont toutes les deux des fonctions à valeurs réelles.

Définition 29 – Fonction bornée

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *bornée sur I* lorsqu'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad \left|f(x)\right| \leq M$$

⚠ Les notions de majoration, minoration et monotonie ne se généralisent pas aux fonctions à valeurs complexes.

Proposition 30 – Lien avec les parties réelles et imaginaires

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeur complexe. Alors :

$$f \text{ est bornée sur } I \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont bornées sur } I$$

Dans la suite, on suppose que $a \in I$ ou que a est une borne de I.

Définition 31 – Limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$

On dit f a pour limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \text{ voisinage de } a;\ \forall x \in V, \left|f(x) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

On le note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

On a donc :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \quad \text{dans } \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \left|f(x) - \ell\right| \xrightarrow[x \to a]{} 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

Théorème 32 – Limite finie et bornitude

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{C}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Proposition 33 – Lien avec les parties réelles et imaginaires

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeur complexe et ℓ un nombre complexe. Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(\ell) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(\ell) \right)$$

Corollaire 34 – Lien avec le module et la conjugaison

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$. On alors $\overline{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \overline{\ell}$ et $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$

Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions à valeurs complexes.

Théorème 35 – Opérations sur les limites

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell' \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$
2. $f(x) \times g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \times \ell'$
3. si $\ell \neq 0$, $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ix}{x-i}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x+ix^2}$

2 Comparaison de fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I (donc $I \subseteq \mathscr{D}_f$ et $I \subseteq \mathscr{D}_g$) ; cet intervalle est supposé non vide et non réduit à un point.

On suppose que $a \in \overline{I}$: a est un point de I ou une borne de I (donc a peut ne pas être dans $\mathscr{D}_f$ ou dans $\mathscr{D}_g$).

On va définir plusieurs notions permettant de **comparer** la fonction f à la fonction g au voisinage de a.

2.1 Fonctions équivalentes

La définition est similaire à celle de deux suites équivalentes. Pour simplifier les définitions, on supposera toujours qu'il existe V voisinage de a tel que g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$.

Définition 36 – Fonctions équivalentes

On dit que f *est équivalente à g au voisinage de a* lorsque : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} 1$.

On le note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $x^2 + x + 2\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $\sqrt{x^2+x} \underset{x\to-\infty}{\sim} -x$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $x^2+x+2\ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\ln(x)$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\sqrt{x^2+x} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$

On peut aussi facilement étendre cette définition au cas $a \in I$ mais f et g sont seulement définies sur $I\setminus\{a\}$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $x+\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

Proposition 37 – Propriétés de la relation ∼

On se donne trois fonctions f, g et h définies sur I et vérifiant les hypothèses ad hoc.

1. Transitivité. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ donnent $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} h(x)$
2. Symétrie. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
3. Réflexivité. $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$

Autrement dit, la relation ∼ vérifie les propriétés d'une relation d'équivalence.

La propriété de symétrie donne que si f est équivalente à g au voisinage de a, alors g est équivalente à f au voisinage de a : on peut donc aussi dire que *f et g sont équivalentes au voisinage de a*.

2.2 Propriétés conservées par équivalence

On se donne deux fonctions f et g définies sur I et vérifiant les hypothèses ad hoc.

Théorème 38 – Équivalence et signe

Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors f et g sont de même signe au sens strict au voisinage de a.

On suppose toujours qu'il existe V voisinage de a tel que g ne s'annule pas sur $V\setminus\{a\}$; le théorème précédent nous apprend qu'il en est de même pour f.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-x^2+x^5\right)=0^+$

Théorème 39 – Équivalence et limite

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell\in\mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$

Les second point nous apprend que les équivalents seront triviaux pour une fonction qui a une limite finie non nulle. Il faudra utiliser des techniques plus compliquées lorsque la fonction tend vers 0 ou vers $\pm\infty$.

⚠ Écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} +\infty$ n'a aucun sens.

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - x^2 + \ln(x)\right)$

✎ ***Exemple.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln(x) + \dfrac{1}{x}\right)$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $x^2 + x + 1 \underset{x\to 0}{\sim} 1$

2.3 Opérations sur les équivalents

On se donne des fonctions f_1, g_1, f_2 et g_2 définies sur I, et vérifiant les hypothèses ad hoc.

Proposition 40 – Règles de calcul pour la relation ∼

1. Valeur absolue. $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ donne $|f_1(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g_1(x)|$
2. Produit. $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ donnent $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)\times g_2(x)$
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ donne $f_1(x)^p \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)^p$
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $f_1(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)^\alpha$
4. Inverse. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ alors $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g_1(x)}$
5. Quotient. Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

⚠ **Par contre il n'est en général pas possible de faire les opérations suivantes.**

- **Somme.** $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$ ne donnent pas $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$
- **Composition par une fonction.** Si h est une fonction, $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $h\circ f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} h\circ g_1(x)$
  En particulier $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ ne donne ni $\mathrm{e}^{f_1(x)} \underset{x\to a}{\sim} \mathrm{e}^{g_1(x)}$, ni $\ln\left(f_1(x)\right) \underset{x\to a}{\sim} \ln\left(g_1(x)\right)$
  Mais attention, on peut composer par les fonctions $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto x^\alpha$: ce sont les seuls cas possibles dans le programme de PCSI.
- **Puissance dépendante de x.** $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ ne donne pas $f_1(x)^{\alpha(x)} \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)^{\alpha(x)}$

Ces opérations sont fausses en général et on peut facilement trouver des contre-exemples. Mais très souvent, elles donneraient le bon résultat ; on peut donc faire une *conjecture* et ensuite la prouver en revenant à la définition ie vérifier que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} 1$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\ln(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ et que $\ln(x+1) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\ln(x+1)+\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln(x)$

⚠ Ne pas oublier les constantes multiplicatives dans les équivalents. Par exemple $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ ne donne pas $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$: le facteur 2 a son importance.

Dans le résultat suivant, il ne faut pas confondre *composition* avec *substitution*.

Théorème 41 – Substitution dans un équivalent

On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

1. Par une fonction. On suppose qu'on a une fonction $x : t \longmapsto x(t)$ telle que $\lim\limits_{t\to\tau} x(t) = a$. Alors :
$$f\big(x(t)\big) \underset{t\to\tau}{\sim} g\big(x(t)\big)$$
2. Par une suite. On suppose qu'on dispose d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Alors :
$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$$

Dans le premier cas on a substitué $x(t)$ à x et dans le second cas on a substitué u_n à x. En pratique on dirait « on pose $x = x(t)$ » ou « on pose $x = u_n$ ».

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right) \underset{t\to 0^+}{\sim} -\ln(t)$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\ln(n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$

2.4 Équivalents usuels

Soit P est une fonction polynôme d'expression $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1} + \cdots + a_p x^p$, où p, q sont deux entiers naturels tels que $p \geq q$. On suppose aussi que $a_q \neq 0$ et $a_p \neq 0$.

Théorème 42 – Équivalent et polynômes

On a :

- en $+\infty$: $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_p x^p$ (terme de plus haut degré)
- en 0 : $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_q x^q$ (terme de plus bas degré).

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent de $\dfrac{\sqrt{x^3+x}}{\sqrt[3]{x^2+x}}$ lorsque $x \to +\infty$

Théorème 43 – Équivalents usuels en 0

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
3. $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
4. $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq 0$: $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$

   En particulier : $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$
7. $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent de $\sqrt{x^3+x} \times \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to +\infty$

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent de $\sqrt{\ln(1+x^2)}$ lorsque $x \to 0$

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent de $\ln(1+x+x^2)$ lorsque $x \to 0$

✎ ***Exemple.*** Déterminer un équivalent de $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\dfrac{\pi}{2} - \arccos(x)$ lorsque $x \to 0$

2.5 Notations de Landau

Comme dans les paragraphes précédents, f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I, a est un point adhérent à I, et on suppose qu'il existe V voisinage de a tel que g ne s'annule pas sur $V\setminus\{a\}$.

Définition 44 – Fonction négligeable

On dit que f *est négligeable devant* g *au voisinage de* a lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\neq a]{x\to a} 0$

On le note $f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$, et on le lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque $x \to a$ ».

Définition 45 – Fonction dominée

On dit que f *est dominée par* g *au voisinage de* a lorsque la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a ie :

$$\exists M>0 ; \exists V \text{ voisinage de } a ;\ \forall x \in \left(V \setminus \{a\}\right) \cap I,\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

On le note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\left(g(x)\right)$, et on le lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ lorsque $x \to a$ ».

On peut aussi définir $f(x) \underset{x\to a^-}{=} \mathcal{O}\left(g(x)\right)$ et $f(x) \underset{x\to a^+}{=} \mathcal{O}\left(g(x)\right)$.

En particulier, on peut retenir que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} o(1) \Longleftrightarrow f(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} 0$$

et que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(1) \Longleftrightarrow \text{ la fonction } f \text{ est bornée sur un voisinage de } a$$

Proposition 46 – Lien entre « le petit o » et « le grand o »

Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}\left(g(x)\right)$.

Par exemple si $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}(x)$. On peut revenir dans l'autre sens en perdant de la précision.

✎ ***Exemple.*** Montrer que si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathcal{O}\left(x^2\right)$ alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$.

Théorème 47 – Lien entre la relation ∼ et « le petit o »

On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) = g(x) + o_{x\to a}\left(g(x)\right)$$

La notation $f(x) = g(x) + o_{x\to a}\left(g(x)\right)$ signifie simplement que $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$.

On en déduit une méthode simple pour trouver une fonction équivalente à une somme.

Corollaire 48 – Équivalent d'une somme

On a :

$$f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longleftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g(x)\big)$$

Dans un somme, un équivalent est donc donné par le terme « prépondérant » (s'il en existe un).

✎ ***Exemple.*** Donner un équivalent de $x+\ln(x)$ et de $x+\ln(1+x)$ lorsque $x\to 0$.

Proposition 49 – Règles de calcul pour « le petit o »

On se donne des fonctions f_1, g_1, h_1, f_2, g_2 vérifiant les hypothèses ad hoc.

1. Transitivité.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$ donne $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$
2. Produit.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_2(x)\big)$ donne $f_1(x)\times f_2(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\times g_2(x)\big)$
3. Somme.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$ donne $f_1(x)+g_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$
4. Multiplication par une constante.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\times f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$
5. Multiplication par une fonction.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$ donne $f_1(x)\times h_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\times h_1(x)\big)$
6. Substitution par une fonction équivalente.
   $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\big(g_1(x)\big)$ et $g_1(x) \underset{x\to a}{\sim} h_1(x)$ donne $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(h_1(x))$

On a des règles de calcul similaires pour le « grand O ».

✎ ***Exemple.*** Trouver un équivalent en 0 de $\sin(x)+1-\cos(x)$.

2.6 Croissances comparées

Les croissances comparées peuvent s'exprimer avec les notations de Landau.

Théorème 50 – Croissances comparées

On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^\alpha\right)$ et $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$.
2. Pour $\gamma > 0$: $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$ et $|x|^\alpha \underset{x\to-\infty}{=} o\left(e^{-\gamma x}\right)$.
3. Pour $\gamma > 0$: $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\gamma x}\right)$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : ln $\ll$ puissance $\ll$ exp

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^3}{(1+x)^4}$.

✎ ***Exemple.*** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2}$.

3 Développements limités

On notera souvent $f(x) = g(x) + o_{x\to a}\big(h(x)\big)$ lorsque $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.

On a la caractérisation suivante.

Lemme 51 – Caractérisation de $f(x) = g(x) + o_{x\to a}\big(h(x)\big)$

$$
\begin{aligned}
& f(x) = g(x) + o_{x\to a}\big(h(x)\big) \\
\iff & \exists\, \varepsilon \text{ fonction définie sur un voisinage } V \text{ de } a \text{ telle que :} \\
& \Big(\forall x \in V,\ f(x) = g(x) + \varepsilon(x) \times h(x)\Big) \text{ et } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}
$$

Important. Ce résultat permet de remplacer l'écriture $f(x) = g(x) + o_{x\to a}\big(h(x)\big)$ qui est à manipuler avec beaucoup de précautions, par l'identité $\forall x \in V,\ f(x) = g(x) + \varepsilon(x) \times h(x)$ qui est une vraie égalité, et qu'on peut donc manipuler sans problème.

3.1 Développement limité d'ordre n en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$

n est un entier naturel, f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un point adhérent à I.

Définition 52 – Développement limité d'ordre n en un point $a \in \mathbb{R}$

On dit que f admet *un développement limité d'ordre n en a*, lorsqu'il existe des réels $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (x-a)^k + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big) \end{aligned}$$

En abrégé on dit que f admet un $DL_n(a)$.

Dans l'écriture $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big)$, chaque terme est négligeable par rapport au précédent.

Le polynôme $x \longmapsto \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n$ est appelé *partie régulière* du $DL_n(a)$ de f.

✎ ***Exemple.*** f admet un $DL_0(a)$ de la forme $f(x) = \lambda_0 + o_{x\to a}(1)$ si, et seulement si, $f(x) \underset{\substack{x\to a \\ x\neq a}}{\longrightarrow} \lambda_0$.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x\to 0}(x^n)$.

✎ ***Exemple.*** Soit $f : x \longmapsto \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_p x^p$ une fonction polynômiale de degré p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ elle admet un $DL_n(0)$ obtenu en *tronquant à l'ordre n* :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_p x^p + o_{x\to 0}(x^n) & \text{si } n \geq p \\ \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n) & \text{si } n < p \end{cases}$$

Si a est un point intérieur à I, et si f est définie seulement sur $I\setminus\{a\}$, on peut définir son $DL_n(a)$ de la même manière.

IMPORTANT. Souvent on se ramènera un $DL_n(0)$ en posant $g(h) = f(a+h)$ ie $f(x) = g(x-a)$.
En effet, f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$, et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :

$$\begin{aligned} & f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + \lambda_2(x-a)^2 + \cdots + \lambda_n(x-a)^n + o_{x\to a}\big((x-a)^n\big) \\ \iff\ & g(h) = \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \cdots + \lambda_n h^n + o_{h\to 0}\big(h^n\big) \end{aligned}$$

Dans la définition suivante, n est encore un entier naturel et f est une fonction définie sur un intervalle I du type $[A,+\infty[$.

Définition 53 – Développement limité d'ordre n en $+\infty$

On dit que f admet *un développement limité d'ordre n en* $+\infty$ (en abrégé $DL_n(+\infty)$), lorsqu'il existe des réels λ_0 ,$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$f(x) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x^n} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{x^k} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

On peut définir de la même manière un $DL_n(-\infty)$ de f.

IMPORTANT. Souvent, on se ramènera à un $Dl_n(0^+)$ en posant $g(h) = f\left(\frac{1}{h}\right)$, ie $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors f admet un $DL_n(+\infty)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0^+)$, et les coefficients sont les mêmes dans les deux développements. Autrement dit :

$$\begin{aligned} & f(x) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x^n} + o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ \iff \quad & g(h) = \lambda_0 + \lambda_1 h + \lambda_2 h^2 + \cdots + \lambda_n h^n + o_{h\to 0^+}(h^n) \end{aligned}$$

Si on cherche un $DL_n(-\infty)$ de f, on utilise de même un $DL_n(0^-)$ de g.

3.2 Propriétés générales des développements limités

Dans ce paragraphe, f est une fonction vérifiant les hypothèses ad hoc pour l'existence d'un $DL_n(0)$.

Théorème 54 – Unicité

Si f admet un $DL_n(0)$, celui-ci est unique.

Corollaire 55 – Cas d'une fonction paire ou impaire

Si f admet un $DL_n(0)$ et si f est paire, alors la partie régulière de f ne contient que des termes d'exposants pairs.

De même si f admet un $DL_n(0)$ et si f est *impaire*, alors la partie régulière de f ne contient que des termes d'exposants *impairs*.

Soit $f : x \longmapsto \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_p x^p$ une fonction polynômiale de degré p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *troncature de f à l'ordre n* la fonction notée $T_n(f)$:

$$T_n(f) : x \longmapsto \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n \text{ si } n \le p \\ f(x) \text{ si } n \ge p+1 \end{cases}$$

$T_n(f)(x)$ est obtenu en ne gardant que les puissances de x plus petites que n ; si $n \geq p+1$ on garde toutes les puissances et l'expression de $f(x)$ est inchangée.

Théorème 56 – Troncature d'un $DL_n(0)$

On suppose que f admet un $DL_n(0)$: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$.
Alors pour tout entier naturel $p \in [\![0, n]\!]$, f admet un $DL_p(0)$ obtenu en tronquant son $DL_n(0)$ à l'ordre p :

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_p x^p + o_{x\to 0}(x^p)$$

Théorème 57 – DL et limite

Si $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$, alors $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} \lambda_0$.

Les premiers termes d'un développement limité peuvent être nuls. En numérotant à partir de l'indice 0 le premier terme non nul, on obtient la *forme normalisée* d'un développement limité :

$$f(x) = x^p\Big(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)\Big)$$

avec $\boxed{\lambda_0 \neq 0}$. Attention, c'est un développement limité à l'ordre $n+p$.

Théorème 58 – DL et équivalent

Si $f(x) = x^p\Big(\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)\Big)$ avec $\boxed{\lambda_0 \neq 0}$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \lambda_0 x^p$.

Un développement limité peut donc être utilisé pour trouver le *signe local* d'une fonction.

3.3 Développements limités usuels en 0

• **Exponentielle.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_n(0)$ de e^x :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o_{x\to 0}(x^n) \end{aligned}}$$

✎ ***Exemple.*** $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}(x-1)^3 + o_{x\to 1}\big((x-1)^3\big)$.

• **Logarithme.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_{x\to 0}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$ et $\ln(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + o_{x\to 1}\left((x-1)^2\right)$.

• **Puissance.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a le $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots \\ &\qquad \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o_{x\to 0}\left(x^n\right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\times\cdots\times(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o_{x\to 0}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$.

Il faut connaître le cas particulier suivant, pour $\alpha = -1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o_{x\to 0}\left(x^n\right)\end{aligned}$$

• **Arctan.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan(x)$:

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o_{x\to 0}\left(x^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + o_{x\to 0}\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\left(x^3\right)$.

• **Sinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n+1}(0)$ de $\sin(x)$:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x\to 0}\big(x^{2n+1}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o_{x\to 0}\big(x^{2n+1}\big) \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\big(x^4\big)$.

• **Cosinus.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le $DL_{2n}(0)$ de $\cos(x)$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x\to 0}\big(x^{2n}\big) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o_{x\to 0}\big(x^{2n}\big) \end{aligned}$$

✎ ***Exemple.*** $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$ et $\sin(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$.

• **Tangente.** Il faut seulement connaître le $DL_3(0)$ de $\tan(x)$:

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$$

3.4 Opérations sur les développements limités

On suppose que les fonctions f et g toutes deux un $DL_n(0)$:

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots + \mu_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

Théorème 59 – Combinaison linéaire de développements limités

Pour tout réels α et β, la fonction $\alpha.f + \beta.g$ admet un $DL_n(0)$:

$$\alpha.f(x) + \beta.g(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha.\lambda_k + \beta.\mu_k) x^k + o_{x\to 0}\big(x^n\big)$$

Noter que pour obtenir un $DL_n(0)$, on part de deux $DL_n(0)$: l'ordre est conservé.

✎ ***Exemple.*** $1 - \cos(x) - \sin(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\cos(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^3 + o_{x\to\pi/3}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^3\right)$

✎ ***Exemple.*** $\sqrt{x} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \dfrac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + o_{x\to 2}\big((x-2)^2\big)$

Théorème 60 – Produit de développements limités

La fonction $f \times g$ admet un $DL_n(0)$:

$$f(x) \times g(x) = T_n\Bigg[\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k x^k\right)}_{\text{à développer}}\Bigg] + o_{x\to 0}\big(x^n\big)$$

Noter que pour obtenir un $DL_n(0)$, on part de deux $DL_n(0)$: l'ordre est conservé.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\cos(x)\cosh(x) = 1 - \dfrac{x^4}{6} + o_{x\to 0}\big(x^4\big)$

Pour simplifier les calculs, on peut remarquer que multiplier un $DL_n(0)$ par x donne un $DL_{n+1}(0)$:

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n) \quad \text{devient} \quad x.f(x) \underset{x\to 0}{=} \lambda_0 x + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x^3 + \cdots + \lambda_n x^{n+1} + o_{x\to 0}\big(x^{n+1}\big)$$

En mettant les développements limités sous forme normalisée, on peut donc prévoir au mieux les différentes ordres à utiliser pour les calculs.

✎ ***Exemple.*** $\ln(1+x) \times \mathrm{e}^x = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\ln(1+x) \times \big(1 - \cos(x)\big) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{4} + o_{x\to 0}\big(x^4\big)$

De même diviser par x transforme un $DL_n(0)$ en $DL_{n-1}(0)$.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

Théorème 61 – Substitution dans un développement limité

. Si $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :

$$f\big(g(x)\big) = \lambda_0 + \lambda_1 g(x) + \lambda_2 g(x)^2 + \cdots + \lambda_n g(x)^n + o\big(g(x)^n\big) + o_{x\to 0}\big(g(x)^n\big)$$

$g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ signifie ici que $\mu_0 = 0$.

Si $g(x)$ est une puissance entière de x, on obtient un développement limité en 0 de $f\big(g(x)\big)$.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3x^4}{8} + o_{x\to 0}\big(x^4\big)$

On peut aussi utiliser le $DL_n(0)$ de $g(x)$ pour obtenir un $DL_n(0)$ de $f\big(g(x)\big)$: on dit qu'on a *composé* les développements limités.

✎ ***Exemple.*** $e^{x+x^2} = 1 + x + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{7x^3}{6} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\ln(1+x^2+x^3) = x^2 + x^3 - \dfrac{x^4}{2} - x^5 - \dfrac{x^6}{6} + o_{x\to 0}\big(x^6\big)$

✎ ***Exemple.*** $\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\sqrt{\cos x} = 1 - \dfrac{x^2}{4} + o_{x\to 0}\big(x^2\big)$

✎ ***Exemple.*** $e^{1/(1+x)} = e - ex + \dfrac{3ex^2}{2} - \dfrac{13ex^3}{6} + o_{x\to 0}\big(x^3\big)$

✎ ***Exemple.*** $\sqrt{1+e^x} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}x}{4} + \dfrac{3\sqrt{2}x^2}{32} + o_{x\to 0}\big(x^2\big)$

Théorème 62 – Inverse d'un développement limité

Si $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ a un $DL_n(0)$ obtenu par composition avec celui de $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u}$.

$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$ signifie ici que $\lambda_0 \neq 0$.

On commence le calcul ainsi :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda_0} \times \frac{1}{1+\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}x+\frac{\lambda_2}{\lambda_0}x^2+\cdots+\frac{\lambda_n}{\lambda_0}x^n\right)} = \frac{1}{\lambda_0} \times \frac{1}{1+u}$$

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^3}{48} + o_{x\to 0}(x^3)$

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{1}{\cos x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o_{x\to 0}(x^4)$

On peut alors calculer le développement limité d'un quotient.

Théorème 63 – Quotient de développements limités

Si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ a un $DL_n(0)$ obtenu par produit de f avec $\dfrac{1}{g}$.

Noter que pour obtenir un $DL_n(0)$, on part de deux $DL_n(0)$: l'ordre est conservé.

⚠ On peut aussi diviser par une puissance de x (bien que dans ce cas $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$), mais l'ordre n'est pas conservé.

✎ ***Exemple.*** $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o_{x\to 0}(x^5)$

En utilisant les formes normalisées, on peut ajuster au mieux les ordres des développements limités.

✎ ***Exemple.*** $\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cosh(x)-1} = -1 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5x^2}{12} + o_{x\to 0}(x^2)$

On rappelle qu'on dit que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I.

Théorème 64 – Primitivation d'un développement limité

On suppose que f est de classe C^1 sur I et que f' admet un $DL_n(0)$:

$$f'(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

Alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ obtenu en primitivant terme à terme :

$$f(x) = f(0) + \lambda_0 x + \lambda_1 \frac{x^2}{2} + \lambda_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + \lambda_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_{x\to 0}(x^{n+1})$$

⚠ Ne pas oublier le terme $f(0)$!

✎ ***Exemple.*** Retrouver le $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$.

✎ ***Exemple.*** Retrouver le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arctan(x)$.

✎ ***Exemple.*** Déterminer le $DL_5(0)$ de $\arccos(x)$.

3.5 Applications des développements limites

3.5.1 Calculs de limites

Pour calculer une limite, on commence par essayer les *opérations sur les limites.*

Si on tombe sur une (ou des) forme(s) indéterminée(s), on doit alors utiliser les notions de ce chapitre :

- pour les termes construits à partir *d'addition* et de *composition*, on utilise les DL pour en trouver un équivalent ;
- pour les termes construits à partir de *produits* et de *quotients*, on peut travailler directement avec les équivalents.

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\dfrac{\tan(2x)-2\tan(x)}{\sin(2x)-2\sin(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -2$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan(x)^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{2}{3}$

✎ ***Exemple.*** Montrer que $\left(\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$

3.5.2 Étude d'extremums

Proposition 65 – DL et extremums

Soit f une fonction admettant un développement limité à l'ordre 2 en a :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + o_{x\to a}\big((x-a)^2\big)$$

1. Si f admet un extremum local en a alors $c_1 = 0$.
2. (a) Si $c_1 = 0$ et $c_2 > 0$, alors f admet un minimum local en a.
   (b) Si $c_1 = 0$ et $c_2 < 0$, alors f admet un maximum local en a.

⚠ Si $c_1 = c_2 = 0$, on ne peut pas conclure sans augmenter l'ordre du DL.

✎ ***Exemple.*** La fonction $f : [0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh(x)}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet un minimum local en 0.

3.5.3 Étude de droites asymptotes

Asymptotes verticales en un point. Si $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de a.

Asymptotes horizontales en $\pm\infty$. Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. On a la même chose en $-\infty$.

Asymptotes obliques en $\pm\infty$. Si $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $f(x) - \lambda.x - \mu \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors la droite d'équation $y = \lambda x + \mu$ est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

L'obtention d'une écriture de la forme :

$$f(x) = \lambda x + \mu + o_{x\to+\infty}(1)$$

permet de conclure que la droite d'équation $y = \lambda x + \mu$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (noter que ce n'est pas un développement limité ; on l'appelle *développement asymtptotique*).

De plus, l'étude du signe du $o(1)$ (obtenue en continuant le développement asymptotique) permet de positionner localement la courbe par rapport à cette asymptote.

On a la même chose en $-\infty$.

✎ ***Exemple.*** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Montrer que la courbe de f admet une droite asymptote en $+\infty$, et positionner localement cette droite et la courbe de f.

4 Formulaire

✎ Croissances comparées

Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:

- $\dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
- $|\ln x|^\beta x^\alpha \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$
- $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
- $|x|^\beta e^{\alpha x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

✎ Equivalents usuels

- $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$
- $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ donc $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$

✎ Développements limités usuels à l'ordre 3

Au voisinage de 0, on a :

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$

  donc $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$
- $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o_{x\to 0}(x^3)$

Pour $\arcsin(x)$ et $\arccos(x)$, on intègre le DL de leur dérivée.

5 Compétences à acquérir sur ce chapitre

➥ Connaître les différentes notions de limites (classique, à gauche/droite, épointée).
- ✪ Savoir écrire la définition d'une limite avec les quantificateurs.
- ✪ Connaître les liens entre les différentes notions de limite.

➥ Calculer la limite d'une fonction.
- ✪ Utiliser les opérations sur les limites.
- ✪ Utiliser des encadrements.
- ✪ Utiliser les croissances comparées et les taux de variation.
- ✪ Utiliser des produits ou des quotients d'équivalents usuels.
- ✪ Utiliser des petits o, pour trouver un équivalent d'une somme (qui sera le terme prépondérant).
- ✪ Utiliser des sommes de développements limités usuels, pour trouver un équivalent d'une somme (dans le cas où aucun terme n'est prépondérant).

➥ Trouver un équivalent simple d'une suite ou d'une fonction.
- ✪ Savoir faire une conjecture et la prouver en revenant à la définition (le quotient des deux fonctions tend vers 1).
- ✪ Pour une somme, savoir identifier s'il un terme prépondérant (dans ce cas c'est un équivalent)
- ✪ Utiliser les équivalents usuels en 0, et y faire une substitution.
- ✪ Utiliser les opérations sur les équivalents.
- ✪ Faire un développement limité et garder le premier terme.

➥ Trouver un développement limité d'une fonction.
- ✪ Connaître les développements limités usuels.
- ✪ Faire un changement de variable pour se ramener en 0 et utiliser un développement limité usuel.
- ✪ Savoir utiliser les opérations sur les développements limités.
- ✪ Alléger les calculs en manipulant des développements limités sous forme réduite.

6 Exercices

Limites d'une fonction

EXERCICE 1. Calculs de limites

1. **Opérations sur les limites.** Déterminer les limites suivantes. Si la limite n'existe pas, envisager la limite à droite ou la limite à gauche.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \ln(x)\times\ln(\ln x)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} (\ln(\sin x)-\ln x)$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

   (f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x(x+1)}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

2. **Quantité conjuguée.** Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x}$

3. **Limites par encadrement.** Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x\cos\left(\mathrm{e}^x\right)}{x^2+1}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{x-\sin x}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Fonctions équivalentes

EXERCICE 2. Utilisation des équivalents

Déterminer les limites suivantes.

1. **Logarithme et exponentielle.**
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(1+x)-\ln x)$
   (b) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^x-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x^2}$
   (d) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$
   (e) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$
2. **Puissances réelles.**
   (a) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$
3. **Fonctions trigonométriques.**
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\dfrac{\pi}{x}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(3x)}{1-2\cos(x)}$
   (c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2}-e^{-\frac{\pi}{2}}}$

EXERCICE 3. Théorème permettant de composer un équivalent par la fonction $\ln$

1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs strictement positives.
   On suppose que $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l\in\overline{\mathbb{R}^+}\setminus\{1\}[0,1[\cup]1,+\infty]$.
   Établir que $\ln\big(f(x)\big)\underset{x\to x_0}{\sim}\ln\big(g(x)\big)$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $f(x)=\ln\left(x^2+2^x\right)$.

EXERCICE 4. Le théorème des gendarmes permet de trouver des équivalents

Soit f une fonction telle qu'au voisinage de $+\infty$, on ait :

$$x^2+\frac{1}{x}\leq f(x)\leq x^2+x.$$

Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Développements limités

EXERCICE 5. Calculs de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_2(0)$ de $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $DL_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{1+x}$
3. $DL_2(2)$ de $\dfrac{1}{x}$
4. $DL_3(\pi/4)$ de $\dfrac{\cos(x)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\pi-4x}$
5. $DL_2(+\infty)$ de $\sqrt{(}x^2+x)-x\mathrm{e}^{1/x}$
6. $DL_2(0)$ de $\sqrt{2+x}$
7. $DL_3(0)$ de $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(2x)-\mathrm{ch}(x)$
8. $DL_3(0)$ de $\arctan(\mathrm{e}^x)$

EXERCICE 6. Limites et DLs

Utiliser des développements limités pour calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\big(2+\cos(x)\big)-3\sin(x)}{x^5}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}$

EXERCICE 7. Plus difficile

À l'aide de développements limités, calculer les limites suivants :

1. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\sin(t)}\right)$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{\cos(t)}{\sin^2(t)}\right)$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(e^x-\sin(x)\Big)^{1/\sin^2(x)}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-\ln(1+x)+\ln(2)-1}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x}$

EXERCICE 8. DL implicite

On admettra dans cet exercice que $\forall x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$ une unique solution, notée x_n.
2. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$. Remarquer que, pour tout $n \geqslant 1$: $x_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right) + n\pi$.
   En déduire : $x_n - \dfrac{\pi}{2} - n\pi \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n\pi}$.
3. Effectuer un développement limité à l'ordre 2, selon les puissances de $\dfrac{1}{n}$, de $x_n - n\pi$. En déduire un développement asymptotique à 4 termes de x_n lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

EXERCICE 9. Branches infinies

Déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de cette ensemble et étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1. $x \longmapsto \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$ 2. $x \longmapsto x + \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x+2}}$