1

1. Soit $x_0 \in I$. Montrons que $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$.

On a $\forall x \in I$, $0 \leq |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$

or $k \times |x - x_0| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

donc par le th de majoration de l'erreur : $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$

Donc f est continue en tout $x_0 \in I$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur } I}$.

2.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on note H_n le prédicat

"$|x_n - \ell| \leq k^n \times |x_0 - \ell|$"

Pour $n = 0$: $k^0 \times |x_0 - \ell| = |x_0 - \ell|$

$|x_n - \ell| = |x_0 - \ell|$

Donc H_0 est vrai.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé pour lequel H_n est vrai.

On a donc $|x_n - \ell| \leq k^n \times |x_0 - \ell|$.

Comme $x_0 \in I$ et I est f-stable on a $x_n \in I$.

De plus $\ell \in I$.

Donc $|f(x_n) - f(l)| \leq k \times |x_n - l|$.

Mais $f(x_n) = x_{n+1}$ et $f(l) = l$.

Donc $|x_{n+1} - l| \leq k|x_n - l|$.

Mais $k > 0$ donne $k|x_n - l| \leq k^{n+1} \times |x_0 - l|$

Par transitivité : $|x_{n+1} - l| \leq k^{n+1} \times |x_0 - l|$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence on a donc $\boxed{H_n \text{ vrai pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

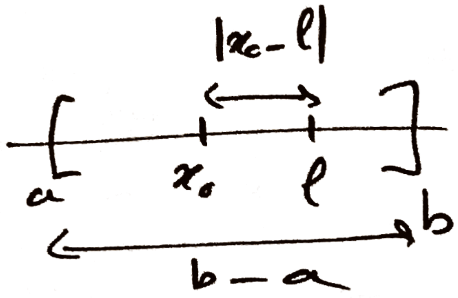
<u>2.(b)</u> On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - l| \leq k^n \times |x_0 - l|$

Mais comme $0 < k < 1$: $k^n \times |x_0 - l| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \times |x_0 - l| = 0$

Par le th de majoration de l'erreur (pour les suites cette fois) on a : $\boxed{x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l}$

<u>2.(c)</u> Comme x_0 et l sont dans l'intervalle $[a, b]$

on a $|x_0 - l| \leq b - a$.



Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - l| \leq k^n \times (b - a)$

```
def suite(f, a, b, k) :
    n = 0
    x = a
    test = 1
    while test > 10**(-3) :
        x = f(x)
        test = k * test
    return x
```