TD10 Ex 11

1. On a $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|P(z_k)| \geqslant 0$

Donc $M \geqslant 0$.

Par l'absurde supposons que $M = 0$.

On a donc $\forall \in [\![0,n]\!]$, $0 \leqslant |P(z_k)| \leqslant M = 0$

donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $|P(z_k)| = 0$ donc $P(z_k) = 0$

Ainsi P a $n+1$ racines distinctes $z_0, z_1, \dots, z_{n+1}$ et donc $\deg P \geqslant n+1$.

Comme $\deg P = n$ on a une contradiction.

Donc $\boxed{M = 0}$

2. $$\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p = \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{2ikp\pi}{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}\right)^k$$

Cas 1 $p \equiv 0\ [n+1]$.

Dans ce cas $\frac{p}{n+1} \in \mathbb{Z}$ et donc $e^{i\frac{2p}{n+1}\pi} = 1$

et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p = \boxed{n+1}$

Cas 2 $p \not\equiv 0\ [n+1]$

Alors $e^{\frac{2ip\pi}{n+1}} \neq 1$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n} (z_k)^p = \frac{1 - \left(e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}\right)^{n+1}}{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}} = \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n+1}}} = \boxed{0}$$

3.(a) $$\left|\sum_{k=0}^{n} P(z_k)\right| \underset{\text{inégalité triangulaire}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} |P(z_k)| \underset{\text{somme d'inégalités}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} M = (n+1)M$$

3.(b) $$\sum_{k=0}^{n} P(z_k) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{n} a_p (z_k)^p \underset{\text{Fubini}}{=} \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_p (z_k)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} a_p \cdot \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } p \in [\![1,n]\!] \\ n+1 & \text{si } p=0 \end{cases}} \Big) = a_0 \times (n+1) + 0 + \dots + 0$$

donc $\sum_{k=0}^{n} P(z_k) = (n+1)a_0$

Avec 3.(a) on a $|(n+1)a_0| = (n+1)|a_0| \leq (n+1)M$

donc $\boxed{|a_0| \leq M}$

4. On pose $Q(X) = a_k + a_{k+1}X + \dots + a_n X^{n-k} + a_0 X^{n+1-k} + \dots + a_{k-1}X^n$

pour $k \in [\![0,n]\!]$, fixé.

D'après 3.(c) : $|a_k| \leqslant N$ où $N = \max_{0 \leq j \leq n} |Q(z_j)|$

Mais $$Q(z_j) \times z_j^k = a_k z_j^k + a_{k+1} z_j^{k+1} + \dots + a_n z_j^n + \underbrace{a_0 z_j^{n+1} + a_1 z_j^{n+2} + \dots + a_{k-1} z_j^{n+k}}_{a_0 + a_1 z_j + \dots + a_{k-1} z_j^{k-1}}$$

car $z_j^{n+1} = 1$

Donc $Q(z_j) \times z_j^k = P(z_j)$

Donc $|Q(z_j)| \times |z_j|^k = |P(z_k)|$.

Or $|z_j| = 1$ donc $|Q(z_j)| = |P(z_j)|$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$.

Ainsi $N = M$.

Donc $\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \ |a_k| \leq M}$